

חידות וחקירות

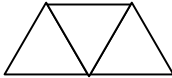
(1) המספר החסר הוא: $(7 + 9) \times 9 = 144$

(2) א) בשלב ראשון אפשר לכרות 3 זנבות אחד אחרי השני, כך שיצמחו במקומם 6 זנבות: לדרקון יהיו 5 ראשים ו-10 זנבות. בשלב שני כורתים שני זנבות בבת אחת חמש פעמים: לדרקון יהיו 10 ראשים ולא זנבות. לבסוף ניתן לכרות את כל הראשים בזוגות.
ב) לפי הנתון, לכל דרקון יש לפחות זנב אחד, ותכונה זו מאפשרת לאביר להרוג אותו בכל מקרה:

- בשלב ראשון כורתים זנבות אחד אחרי השני (כדי להוסיף זנבות) עד שהביטוי:
מספר הראשים + חצי ממספר הזנבות, יהיה מספר זוגי.
- לאחר מכן כורתים את כל הזנבות בזוגות ולבסוף כורתים את כל הראשים בזוגות.

(3)

יש 6 טרפזים מהצורה:



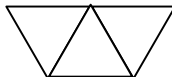
6 טרפזים מהצורה:



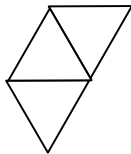
6 טרפזים מהצורה:



3 טרפזים מהצורה:



3 טרפזים מהצורה:



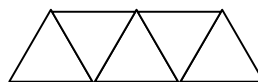
3 טרפזים מהצורה:



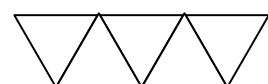
רואים כי אפשר לספור רק את הטרפזים שהבסיסים שלהם אופקיים, ולאחר מכן כופלים את מספריהם ב-3.

ספרנו 9 טרפזים מסוג זה ברשימה לעיל.

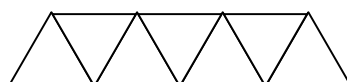
יש עוד 3 טרפזים מהצורה:



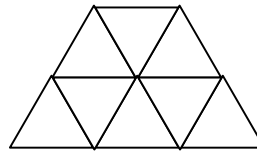
1 מהצורה



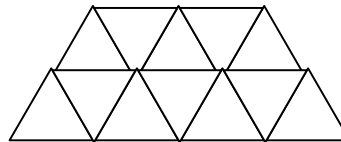
1 מהצורה



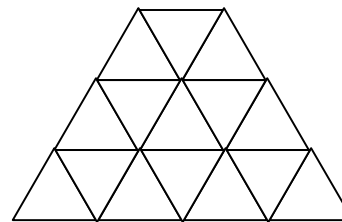
חידות וחקירות



3 מהצורה



1 מהצורה



1 מהצורה

סה"כ 19 טרפזים שהבסיסים שלהם אופקיים.
לכן יש בסה"כ $57 = 3 \times 19$ טרפזים.

- (4) כדי שהשחקן הראשון יגיע ל-20, השחקן השני צריך להגיע ל-18 או ל-19 קודם. דבר זה אפשרי אם השחקן הראשון מגיע לפניו ל-17. באותו אופן אם השחקן הראשון מגיע ל-14, הוא יכול להבטיח לעצמו שהוא יוכל להגיע ל-17 לאחר מכן. וכן, אם הוא מגיע ל-11, הוא יכול להבטיח לעצמו שהוא יוכל להגיע ל-14 לאחר מכן, וכן הלאה. לפני כן הוא צריך להגיע למספרים 8, 5, ו-2. כלומר: השחקן הראשון צריך לכתוב "2" בתחילת המשחק, ולאחר מכן 5, 8, 11, 14, 17, 20.

- (5) 1 2 2 2 1 1 3 1
(בשורה הקודמת רואים פעם אחת את המספר 3, פעם אחת את המספר 1, פעמיים את המספר 2, פעמיים את המספר 1)

- (6) תשובה לרמז: לא ייתכן כי אם אורח אחד מכיר את כל האורחים, הוא מכיר גם את האורח הראשון, שלפי הנתון ברמז, אינו מכיר אף אחד. תשובה לשאלה: נסמן ב-N את מספר האורחים. כל אורח מכיר בין 1 ל-N אורחים (כלומר יש N אפשרויות). כעת נניח שכל אורח מכיר מספר שונה של אורחים. לפיכך אנו חייבים להסיק שאחד מהם מכיר אורח אחד, שאורח שני מכיר שני אורחים, וכן הלאה. אך ראינו שדבר זה הוא בלתי-אפשרי. לכן המסקנה היא שיש בהכרח שני אורחים שמכירים אותו מספר של אורחים.

- (7) א) 1 5 10 10 5 1
ב) הסכומים הם חזקות של 2.
ג) בכל שורה נתונה משתמשים פעמיים בכל מספר: פעם אחת כדי לחשב את המספר שמתחתיו.

חידות וחקירות

פעם נוספת כדי לחשב את המספר שמימין המספר שמתחתיו.
סיבה זו סכום המספרים שבשורה נתונה גדול פי 2 מהסכום של המספרים שבשורה הקודמת.
מכיוון שסכום המספרים שבשורה הראשונה הוא $2^0 = 1$, סכום המספרים שבכל שורה גם הוא חזקה של 2.

(8) כאשר כופלים ב-9 מספר בין 2 ל-9, סכום הספרות של המכפלה הוא בהכרח 9.
לאחר מכן מקבלים: $9 \times 11 = 99 = 90 + 9$
 $x = 9, y = 0$.

(9) בכל חזקה של 5 (אם המעריך שונה מ-0) ספרת היחידות היא 5. לכן יש למצוא חזקות של 2 בהן ספרת היחידות היא 8. ממספרים אלה מחסרים 3 ובודקים אם מקבלים חזקה של 5:
 $2^3 = 8, 8 - 3 = 5 = 5^1$
לכן פתרון אפשרי הוא $a = 3, b = 1$.
 $2^7 = 128, 128 - 3 = 125 = 5^3$
לכן פתרון נוסף הוא $a = 7, b = 3$.

(10) דרך הפתרון הקצרה ביותר היא על-ידי סרטוט.
שני חברים יקבלו (כל אחד) 2 חביות מלאות, 3 חביות חצי מלאות, ו-2 חביות ריקות.
החבר השלישי יקבל 3 חביות מלאות, חבית חצי מלאה ו-3 חביות ריקות.

(11) א) האסירים 1, 4, 9, 16, 25 ישוחררו.
ב) המספרים המתקבלים הם הריבועים השלמים:
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225.
(תכונה זו נובעת מכך שהמספר של חצי-סיבובים של הכפתור N הוא מספר המחלקים של N, והמספרים שהם ריבועים שלמים הם היחידים שמספר המחלקים שלהם הוא אי-זוגי. לכן על הכפתורים 1, 4, 9, וכו' יעשו מספר אי-זוגי של סיבובים: האסירים ישוחררו.)

(12) חצי תרנגולת מטילה חצי ביצה בחצי יום.
לכן תרנגולת מטילה ביצה בחצי יום (ולא ביום!).
לכן תרנגולת מטילה 2 ביצים ביום.
לכן 10 תרנגולת מטילות 20 ביצים ביום.
לכן ב-10 ימים, 10 תרנגולות מטילות 200 ביצים.

(13) א) מספיק לספור כמה כפולות של 5 קטנות או שוות ל-n (כל עוד ש- $n < 25$).
5, 10, 15 הן הכפולות של 5 הקטנות מ-19 לכן 19! מסתיים ב-3 אפסים.
5, 10, 15, 20 הן הכפולות של 5 הקטנות מ-21 לכן 21! מסתיים ב-4 אפסים.
ב) 24! מסתיים ב-4 אפסים, ו-25! מסתיים ב-6 אפסים (כי 5 מופיע פעמיים בפירוק לגורמים של 25). לכן לא קיים מספר n כך שבסוף המספר n! חמישה אפסים.

(14) נסמן את המספר ב-abc.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \times \\ \hline = \end{array}$$

מכאן $c = 5$ או $c = 0$, ומכיוון שהמספר המבוקש הוא אי-זוגי $c = 5$.
לכן $9 \times a = b - 4$ (במודולו 10). לכן $b = 7$ או $b = 2$.
לכן $abc = 675$ או $abc = 225$.

חידות וחקירות

(15) נסמן את המספר x ב- $3abcd$.

$$\begin{array}{r} a \quad b \quad c \quad d \quad 3 \\ - \quad 3 \quad a \quad b \quad c \quad d \\ \hline = \quad 2 \quad 9 \quad 2 \quad 0 \quad 5 \end{array}$$

מכאן $x = 36,578$

(16) המספר הוא בצורה $abc.d$.

לפי הנתון אפשר לכתוב אותו כך: $34c.6$.

345.6 הוא $c = 5$ לכן $6 + 4 = 10 = 2 \times 5$

(17)

$$\begin{array}{r} 7 \quad 7 \quad 3 \\ + \quad 7 \quad 7 \quad 3 \\ \hline = \quad 1 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \end{array}$$

(18) 220 רגליים \leftarrow 55 גמלים

נסמן ב- x את מספר הגמלים החד-דבשתיים. נקבל:

$$x + 2(55 - x) = 87$$

ומכאן $x = 23$

יש 23 גמלים חד-דבשתיים ו-32 גמלים דו-דבשתיים בשיירה.

(19) א) בוחרים נקודה על אחד הישרים.

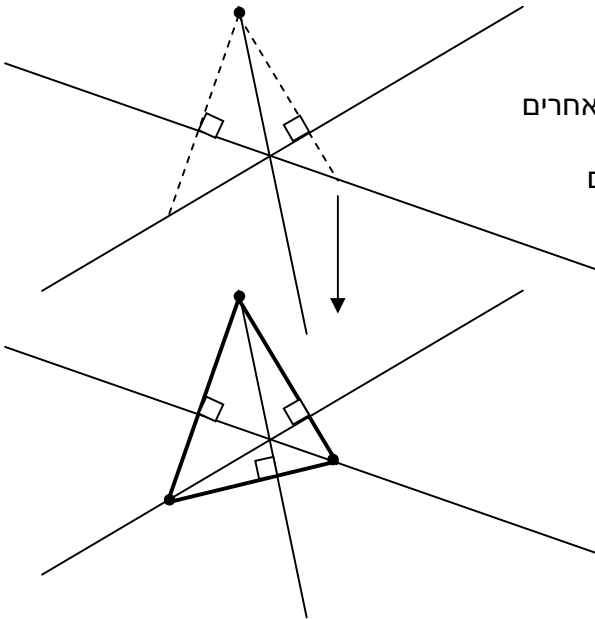
נקודה זו תהיה אחד הקדקודים של המשולש.

ב) מסרטטים קווים (במקווקו) אנכיים לשני הישרים האחרים

העוברים דרך נקודה זו.

ג) שתי נקודות החיתוך הנוספות של הקווים מקווקוים

עם אותם ישרים הן הקדקודים החסרים של המשולש



(20) א) יש פי 5 פחות עובדים בשאלה זו (100) מאשר בנתון (500). לכן ייצור אותה כמות של

מכונות ייקח פי 5 יותר זמן, כלומר 40 שעות.

ב) יש פי 3.5 יותר עובדים בשאלה זו (1,750) מאשר בנתון (500), וזמן הייצור (24 שעות)

גדול פי 3 מהזמן שבנתון. לכן העובדים ייצרו $28 \times 3.5 \times 3 = 294$ מכונות.

ג) על פי הנתון 500 עובדים ייצרו 7 מכונות בשעתיים. לכן צריך 5,000 עובדים כדי לייצר 70

מכונות בשעתיים.

חידות וחקירות

(21) לפני שנתי מצא את ה-180 ש היו לו: 44 ש = 224 - 180.

סכום זה מהווה $\frac{15}{15} - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$ מהסכום שהיה לו לפני שקנה את קופסת העוגיות.

לכן הסכום שהיה לו לפני שקנה את קופסת העוגיות הוא:

$$\frac{15}{11} \cdot 44 \text{ כלומר } 60 \text{ ש.}$$

סכום זה מהווה $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ מהסכום שהיה לו לפני שקנה את המגזין.

לכן הסכום שהיה לו כשיצא מביתו הוא:

$$\frac{4}{3} \cdot 60 \text{ כלומר } 80 \text{ ש.}$$

(22) דוגמה של פתרון דרך משוואה (נסמן ב- x את מספר התפוחים שהיו בסל בהתחלה):

$$x - \left(\frac{2x}{6} + \frac{x}{8} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 1 \right) = 10$$

$$x - \left(\frac{40x}{120} + \frac{15x}{120} + \frac{30x}{120} + \frac{24x}{120} + 1 \right) = 10$$

$$\frac{120x}{120} - \frac{109x}{120} - 1 = 10$$

$$\frac{11x}{120} = 11$$

$$x = 120$$

היו 120 תפוחים בסל.

(23) דוגמה של פתרון דרך משוואות:

נסמן ב- x את הסכום שכל אחד קיבל, ונסמן ב- n את מספר הבנים.

הסכום שהבן שלפני האחרון קיבל הוא x . לפני כן היו בכספת $2x$.

בשלב ראשון הוא לוקח $1 - n$ מטבעות, ולאחר מכן לוקח עשירית ממה שנשאר מה- $2x$

$$x = 2x - 1 + \frac{1}{10}[2x - (n - 1)]$$

באותה מידה אם נתייחס לבן שלפניו, נקבל:

$$x = 3x - 2 + \frac{1}{10}[3x - (n - 2)]$$

אם נפתור מערכת משוואה זו נקבל: $x = n = 9$ (הערה: אפשר לקבל משוואה בה n לא מופיע דרך חיסור שתי המשוואות לעיל).

כלומר: היו 9 אחים והיו 81 מטבעות בכספת.

חידות וחקירות

(24) יש למצוא את הפתרונות הטבעיים x, y, z של המשוואה:

$$3x + 1.5y + 0.5z = 20$$

$$x < y < z$$

נקבל:

x	y	z
3	4	10
3	5	7
2	3	19
2	4	16
2	5	13
2	6	10
1	5	19
1	6	16
1	7	13
1	8	10

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \quad \text{(א)}$$

(ב) ניתן לחלק את השבר $\frac{1}{6}$ לפי היחס 2:1. מקבלים את השברים: $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$ ו-

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = 1 \quad \text{לכן:}$$

(ג) אפשר להמשיך על-ידי חלוקת השבר הקטן ביותר לפי היחס 2:1 (כך המכנה של השבר הקטן ביותר תמיד יהיה מספר זוגי, ולכן תמיד אפשר להמשיך הלאה). לדוגמה, נחלק את

השבר $\frac{1}{18}$ לפי היחס 2:1. מקבלים את השברים: $\frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{27}$ ו- $\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{54}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} = 1 \quad \text{לכן:}$$

(26) (א) ממלאים את הדלי של ה-5 ל'.

(ב) מרוקנים אותו לתוך הדלי של ה-3 ל' כך שנשארים 2 ל' בדלי של ה-5 ל'.

(ג) מרוקנים את הדלי של ה-3 ל'.

(ד) שופכים את 2 ל' מהדלי של ה-5 ל' לתוך הדלי של ה-3 ל'.

(ה) ממלאים את הדלי של ה-5 ל'.

(ו) שופכים מים מהדלי של ה-5 ל' לתוך הדלי של ה-3 ל', כך שהדלי של ה-3 ל' יהיה בדיוק

מלא. נשארים 4 ל' בדלי של ה-5 ל'.