תורת המספרים

תורת המספרים היא ענף מתמטי שעוסק בחקר מספרים טבעיים (1, 2, 3.....). ישנם תחומים רבים בענף זה והפרק בחוברת עוסק בעיקר ב"תורת המספרים האלמנטרית" ובעיקר בבעיות התחלקות של מספרים וביטויים. הפרק מתחיל מנושאים יסודיים שנלמדו במסגרת בית-הספר היסודי, כגון מספרים ראשוניים ומספרים פריקים. בהמשך, התלמידים ישתמשו בכלים שנלמדו בפרקים הקודמים של החוברת ובפרט, בפרק על חבורות. במהלך הלימוד יוכיחו התלמידים סימני התחלקות ידועים בעזרת חשבון מודולרי ובסוף הפרק יוכיחו אחד המשפטים המפורסמים – "קיימים אין-סוף מספרים ראשוניים."

שיעור ראשון: מספרים ראשוניים ומספרים פריקים עמ' 43 (כשני שיעורים).

<u>מושגים מרכזיים</u>: **מספרים ראשוניים ומספרים פריקים**

הנפה של ארטוסתנס

<u>המלצה להוראה</u>:

את השיעור הראשון מומלץ להתחיל מקריאת הרקע ההיסטורי שמופיע בעמ' 43. ניתן לשאול את התלמידים אם שמעו על המשפטים שמוזכרים ברקע – המשפט של פרמה וכד'.

- את שאלות 1 – 2 ניתן לתת כעבודה עצמית *(שיעור 1)*. התלמידים נפגשו עם הנושא של הנפה בבית-הספר היסודי, ולכן הם יכולים לפתור את התרגילים לבד. מומלץ לעודד עבודה בקבוצות על מנת שהתלמידים יוכלו להזכיר אחד לשני את השיטה. בסיום שתי השאלות מומלץ לסכם את העבודה עם הנפה. מומלץ להדגיש שאחרי שמסיימים לעבוד עם הנפה, מופיעים בה שני סוגי מספרים: מספרים שמוקפים בעיגול ומספרים שמחוקים בקו. מומלץ לשאול את התלמידים לגבי המשמעות של הדבר (מספר המסומן בעיגול – משמעו שאין לו מחלקים ראשוניים שקטנים ממנו – לכן הוא מספר ראשוני; מספר מחוק עם קו – יש לו מחלקים ראשוניים שקטנים ממנו – מספר פריק). הבחנה זו תסייע לתלמידים בשאלות הבאות.
- שאלות 3 – 4 יכולות להתאים לחקר עצמי בכיתות חזקות בלבד *(שיעור 2)*. בשאלות אלה התלמידים מוכיחים בצורה הדרגתית ומודרכת את התכונות: "לכל מספר טבעי גדול מ- 2 יש לפחות מחלק ראשוני אחד" (שיכול להיות המספר עצמו אם הוא המספר ראשוני - שאלה 3); כדי לבדוק אם מספר N הוא ראשוני, מספיק לבדוק אם יש לו מחלקים ראשוניים הקטנים מ- $\sqrt{N}$. כדאי לחזור ולהסביר מדוע (שאלה 4). ניתן לפתור את השאלות גם בדיון כיתתי, כאשר חשוב למקד את התלמידים לראות את הקשר בין הסעיפים השונים. ראיית הקשרים מביאה להבנת ההוכחה, לכן חשוב לדון בכל שאלה במהלך או אחרי הפתרון (תלוי בכיתה).

<u>תשובות והערות לתרגילים</u>:

(1) א) מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מ-1 שלא ניתן להציגו כמכפלה של 2 מספרים טבעיים הקטנים ממנו, הוא מתחלק רק בעצמו. מספר פריק הוא מספר שאינו ראשוני. כלומר הוא מספר טבעי גדול מ-1 שניתן להציגו כמכפלה של 2 מספרים טבעיים הקטנים ממנו.

ב) 2, 5, 7, 59, 101

ג) הנפה של ארטוסתנס היא שיטה למציאת מספרים ראשוניים.

שלב I: כותבים את כל המספרים הטבעיים בטבלה של 10 טורים. (בשורה הראשונה רק 9 מספרים, 2-10, משום שהשמיטו את המספר 1, בכל יתר השורות 10 מספרים).

שלב II: מסמנים את המספר הראשון (המספר 2) , מוחקים את כל כפולותיו.

שלב III: מסמנים, שוב ע"י עיגול, את המספר הראשון שאינו מחוק (המספר 3), מוחקים את כל כפולותיו.

חוזרים על שלב III עד שמגיעים למספר האחרון הרשום בטבלה.

לסיכום: כל המספרים המוקפים בעיגול הם המספרים הראשוניים וכל היתר לא.

המספרים הראשוניים הקטנים מ-100 הם:

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97.

ד) לדוגמה 101,103,107.

(2) א) לכל המספרים 14, 29, 87, 343 יש מחלק ראשוני ($14=2\cdot7$,$87=3\cdot29$, $343=7\cdot49$).

המספר 29 הוא ראשוני, ולכן הוא עצמו המחלק הראשוני של עצמו: $29\cdot1 = 29$.

תורת המספרים

ב) ① המחלקים של 36 הם : 2 ו-3. $(36=2\cdot2\cdot3\cdot3)$.

② המחלקים של 100 הם 2 ו-5. $(100=2\cdot2\cdot5\cdot5)$.

③ המחלקים של 57 הם : 3 ו-19. $(57=3\cdot19)$.

④ המחלק של 625 הוא : 5. $(625=5\cdot5\cdot5\cdot5)$.

(3) א) לכל מספר טבעי גדול מ-2 יש לפחות מחלק ראשוני אחד. זה נכון לפי "משפט היסוד" של האריתמטיקה. (כל מספר טבעי יכול להיכתב כמכפלה ייחודית של מספרים ראשוניים). ניתן להסיק מסקנה זו גם מהתוצאות שקיבלנו בנפה. ראינו שם שכל המספרים או מוקפים בעיגול (ואז יש להם מחלק ראשוני, שזה הם עצמם) או שהם מחוקים בקו (ואז יש להם מחלק ראשוני שממש קטן מהם). אם היינו ממשיכים את הנפה עד אין-סוף, כל המספרים היו או בעיגולים או מחוקים.

ב) N לא יכול להיות מספר ראשוני, כי הגדרנו אותו כמספר קטן ביותר שאין לו מחלק ראשוני, אם הוא היה ראשוני, הוא היה מחלק ראשוני של עצמו בסתירה למה שהגדרנו.

ג) הגדרנו את N כמספר הקטן ביותר שאין לו מחלק ראשוני, כיוון ש-A<N, ולכל מספר טבעי (הקטן מ-N לפי ההנחה) יש מחלק ראשוני, הרי של-A יש מחלק ראשוני.

ד) התשובה סותרת את ההנחה של-N אין מחלק ראשוני. A הוא מחלק של N, ול-A יש מחלק ראשוני, לכן גם ל-N יש מחלק ראשוני.

(4) א) 113 הוא מספר ראשוני. אפשר לבדוק בעזרת הנפה של ארטוסתנס, אפשר גם לחלק במספרים הראשוניים הקטנים ממנו. בשלב זה ניתן לומר שמספיק לחלק במספרים הראשוניים הקטנים מ-113/2. כמובן, שהתלמידים יכולים להניח שחייבים לבדוק את כל המספרים הראשוניים שקטנים ממנו, ואז כדאי לדון בנושא, או לבחון שוב את התשובה לאחר הפתרון של השאלה. חשוב שהתלמידים יבינו מדוע מספיק לבדוק מספרים עד 113/2.

ב) אם $N=A\cdot B$ אחד מהם (A או B) צריך להיות גדול מ- $\sqrt{N}$, והשני קטן מ- $\sqrt{N}$.

הסבר : $N=\sqrt{N}\cdot\sqrt{N}$. כאן מדובר במכפלה של 2 גורמים שווים, $\sqrt{N}$. כדי לשמור על התוצאה N כאשר שני הגורמים לא שווים, יש להגדיל את אחד הגורמים ולהקטין את השני.

ג) לפי סעיף ב' אחד המחלקים צריך להיות קטן מ- $\sqrt{N}$ כאשר מדובר בשני גורמים. הדבר נכון גם כאשר מדובר ביותר משני גורמים (במקרה זה אחד מתוך שני גורמים מוצג כמכפלה). לכן אם מספר הוא פריק, לא משנה באיזה פירוק, תמיד יהיה גורם אחד שקטן מ- $\sqrt{N}$.

ד) ① 119 *אינו ראשוני*. $\sqrt{119}=10.9$. לכן מספיק לבדוק את המספרים הראשוניים הקטנים מ-10.

$19=7\cdot17$

② 407 *אינו ראשוני*. $\sqrt{407}=20.17$. מספיק לבדוק את המספרים הראשוניים הקטנים מ-20.

$407=11\cdot37$

③ 493 *אינו ראשוני*. $\sqrt{493}=22.2$ בודקים מספרים ראשוניים קטנים מ- 23. $493=17\cdot29$.

④ 887 הוא *מספר ראשוני*. $\sqrt{887}=29.78$. בודקים מספרים ראשוניים קטנים מ- 30.

⑤ 899 הוא *מספר פריק*. $\sqrt{899}=29.98$. בודקים מספרים ראשוניים קטנים מ- 30.

$899=29\cdot31$.

שיעור שני: סימני התחלקות, עמ' 47 (כשני שיעורים)

מושגים מרכזיים: **סימני התחלקות ב- 3, ב- 9, ב-11.**

הוכחת סימני התחלקות באמצעות חשבון מודולרי.

תורת המספרים

המלצה להוראה:

מומלץ להתחיל את ההוראה של הנושא מחזרה על תכונות של חשבון מודולרי – כפל וחיבור מודולריים (התלמידים מכירים את הנושא מחוברת העשרה של כיתה ז') שמופיעים בשיעור בעמ' 47. התרגיל הראשון מתאים לעבודת חקר (ביחידים או בזוגות) רק עבור קבוצות של תלמידים חזקים. בקבוצות פחות חזקות יידרש ליווי של מורה. בתרגיל, על מנת לחשב מחלקות שארית של מספרים, מתבקשים התלמידים להשתמש בשתי דרכים. דרך ראשונה – באמצעות חישוב של שארית בחלוקה, ודרך שנייה – באמצעות ביצוע פעולות מודולריות. יש להניח ששימוש בחשבון מודולרי יהיה יותר מאתגר עבור התלמידים ויש להנחות אותם בדרך זו. מומלץ להדגים על הלוח את החישוב עבור כפל וחיבור ולהזכיר שבפעולות הללו ניתן להחליף כל מספר במספר ששווה לו במחלקת השקילות הנתונה. לאחר סיום הביצוע של תרגיל 1 חשוב לבדוק את ההסבר לסעיף ח'. יש לוודא שהתלמידים הבינו את צורת הכתיבה הכללית של כל מספר, את המשמעות של פירוק המספר לסכום של מכפלה של מספר חד-ספרתי בכפולה של עשר. הבנה של סעיף זה מהווה בסיס לביצוע של התרגילים הבאים בפרק, שהם הוכחה של סימני ההתחלקות ב- 9 וב- 11 שמופיעה בתרגילים 2 ו- 3.

בתרגיל 2 מתבקשים התלמידים לחזור על ההוכחה שמופיעה בתרגיל 1 עבור מחלקת שקילות של 9, ולהגיע למסקנה שמספר מתחלק ב – 9 רק אם סכום הספרות שלו מתחלק ב- 9. חשוב לציין שגם אחרי שהתלמידים יגיעו לשוויון: $100c + 10b + a \pmod 9 = c + b + a \pmod 9$, הם חייבים לעשות צעד נוסף ולהבין שמכך נובע שמספר מתחלק ב- 9 <u>ללא שארית</u> רק אם סכום ספרותיו מתחלק ב- 9 ללא שארית. המסקנה הנ"ל היא לא מסקנה ישירה שנובעת מהביטוי באופן מיידי. שלב הביניים הוא להבין שבעצם המספר המקורי מתחלק ב- 9 עם אותה שארית כמו סכום ספרותיו. ואז מבינים ששארית בחלוקה של המספר היא 0 אם ורק אם שארית החלוקה של סכום הספרות היא 0. מומלץ מאוד לדון בכך עם התלמידים באמצעות הצגת דוגמאות רבות ככל האפשר למסקנה.

מומלץ לבצע את סעיף א' של תרגיל 3 בסיוע של מחשבון. על התלמידים לזהות חוקיות שמתקבלת עבור החזקות השונות של 10. ביצוע התרגיל מסתמך על השיטה שפותחה בתרגילים 1 ו- 2, כאשר רמת הקושי של התרגיל היא גבוהה יותר והתלמידים מתבקשים להתמודד עם הסימנים +/- בהתאם לחזקה של 10. התרגיל מאתגר וייתכן שהתלמידים יצטרכו סיוע והדרכה של מורה. במהלך פעילות החקר מומלץ לעבור בין התלמידים ולראות שהם מבינים את הסעיפים השונים ואת הקשר בין הסעיפים.

תשובות והערות לתרגילים:

(1) א) השארית היא 1. $10=1 \pmod 3$.

ב) דרך א': $100=1 \pmod 3$, $100-99=1$, $33\cdot3=99$, $100 : 3=33.333$

(חלוקה וחישוב של שארית).

דרך ב': $100=10\cdot10 \pmod 3=1\cdot1 \pmod 3=1 \pmod 3$, $10=1 \pmod 3$

(חישוב באמצעות פעולות מודולריות – כפל מודולרי).

ג) דרך א': $1000=1 \pmod 3$, $1000-999=1$ $333\cdot3=999$, $1000 : 3=333.333$.

דרך ב': $1000=10\cdot10\cdot10 \pmod 3=1\cdot1\cdot1 \pmod 3=1 \pmod 3$, $10=1 \pmod 3$.

ד) לכל החזקות של 10 יש אותה שארית, 1, מודולו 3. כל חזקה של 10 אפשר לכתוב כמכפלה של 10 בעצמו מספר פעמים. כיוון ש- $10=1 \pmod 3$, בחישוב מודולרי נקבל מכפלה של 1 בעצמו מספר פעמים.

ה) $12345= 1\cdot10,000+2\cdot1,000+3\cdot100+4\cdot10+5\cdot1=1+2+3+4+5 \pmod 3=15 \pmod 3$

כיוון ש-$10=1 \pmod 3$. $10\cdot a=1\cdot a \pmod 3=a \pmod 3$. בסעיף ד' ראינו שלכל החזקות של 10 יש אותה שארית, 1, לכן השאריות הן סכום המקדמים של החזקות של 10.

המספר 12,345 מתחלק ב-3. הסבר: $12,345=15 \pmod 3 = 0 \pmod 3$ $15=0 \pmod 3$.

ו) $N=10\cdot b+a$.

ז) $N=100\cdot c+10\cdot b+a$.

ח) כדי שמספר יתחלק ב-3, השארית מודולו 3 צריכה להיות 0. לפי סעיף ה' ראינו שמתקיים השוויון: $100\cdot c+10\cdot b+a=c+b+a \pmod 3$. כלומר השארית בחילוק ב-3 היא סכום הספרות מודולו 3.

תורת המספרים

לכן אם מתקיים: $c+b+a=0(\mathrm{mod}3)$, המספר מתחלק ב-3. את התוצאה ניתן להכליל למספר בעל יותר משלוש ספרות, מכיוון שכל מספר ניתן להצגה כסכום של כפולות של חזקות של עשר במספר חד-ספרתי.

(2) $10=1(\mathrm{mod}9)$. בדומה לתרגיל 1 ד', לכל החזקות של 10 אותה שארית, 1 מודולו 9.

כל מספר ניתן לכתוב כ: $100\cdot c+10\cdot b+a$ וכו'. בדומה לתרגיל 1 ה', ניתן לכתוב:

$100\cdot c+10\cdot b+a=c+b+a(\mathrm{mod}9)$.

כדי שמספר יתחלק ב-9, השארית מודולו 9 צריכה להיות 0.

כלומר צריך להתקיים: $c+b+a=0(\mathrm{mod}9)$.

(3) א) $10{,}000=1(\mathrm{mod}\ 11)$ $1000=10(\mathrm{mod}\ 11)$ $100=1(\mathrm{mod}\ 11)$ $10=10(\mathrm{mod}\ 11)$.
(כאשר מספר האפסים זוגי, השארית 1, כאשר מספר האפסים אי-זוגי, השארית 10).
ב) $10=10(\mathrm{mod}\ 11)$, כלומר השארית 10.
ניתן לומר שחסר 1 כדי שהשארית תהיה 0 מודולו 11.
$10=-1(\mathrm{mod}\ 11)$ פירושו שחסר 1 כדי שהשארית תהיה 0 מודולו 11.
הסבר חליפי: המספרים 10 ו- -1- נמצאים באותו מרחק מכפולה של 11 על ציר המספרים.
ג) ישנה חוקיות בשאריות של חזקות של 10 בחלוקה ב- 11. כאשר החזקה היא זוגית, השארית היא 1, כאשר חזקה היא אי-זוגית, השארית היא 1- (או 10 לפי הסעיף הקודם).

ד) $12{,}345=1\cdot10{,}000+2\cdot1{,}000+3\cdot100+4\cdot10+5$, לפי סעיף ב'- ג' השאריות מודולו 11 הן 1 או 1- (כפול הספרה המתאימה לפי תרגיל 1 ה').
לכן נקבל: $12{,}345=1-2+3-4+5(\mathrm{mod}11)$
$1-2+3-4+5(\mathrm{mod}11)=3(\mathrm{mod}11)$. המספר 12,345 לא מתחלק ב-11, השארית היא 3.
ה) מחברים את הספרות במקומות הזוגיים ומחסרים את הספרות במקומות האי-זוגיים, אם התוצאה היא 0 או 11, היא מתחלקת ב- 11, והמספר המקורי מתחלק ב-11. (כלומר שארית 0 או 11 מודולו 11).

① המספר 99 מתחלק ב-11. $99=9\cdot10+9=9-9=0(\mathrm{mod}11)$.

② המספר 999 לא מתחלק ב-11. $999=9\cdot100+9\cdot10+9=+-9+9=9(\mathrm{mod}\ 11)$.

③ המספר 275 מתחלק ב-11. $275=2\cdot100+7\cdot10+5=2-7+5=0(\mathrm{mod}\ 11)$.

④ המספר 2,075 לא מתחלק ב-11. $2\cdot1000+7\cdot10+5=-2-7+5=-4(\mathrm{mod}11)$

⑤ המספר 319 מתחלק ב-11. $3\cdot10+1\cdot10+9=3-1+9=11(\mathrm{mod}1)=0(\mathrm{mod}11)$.

⑥ המספר 9141 מתחלק ב-11. $9\cdot1000+1\cdot100+4\cdot10+1=-9+1-4+1=-11(\mathrm{mod}11)=0(\mathrm{mod}11)$

ו) למספר צריכות להיות 5 ספרות שונות. נסמן אותן ב-e ספרת היחידות, d ספרת העשרות, וכו'.
נכתוב את המספר ואת השאריות מודולו 11 כפי שראינו בסעיף ד', נקבל:

$a\cdot10{,}000+b\cdot1{,}000+c\cdot100+d\cdot10+e=a-b+c-d+e=0(\mathrm{mod}11)$.

אחת האפשרויות היא 96250. אפשרויות נוספות: 96,217 , 96,140, 86240 וכו'.

שיעור שלישי: ביטויים אלגבריים והתחלקות, עמ' 50 (שיעור אחד)

מושגים מרכזיים: **התחלקות של ביטויים אלגבריים במספרים מסוימים**
הוכחת התחלקות של ביטויים באמצעות חשבון מודולרי

המלצה להוראה:
תרגיל מספר 1 מתאים לחקר יחידני או בקבוצות. התלמידים מגלים תכונה של מכפלת כל זוג של מספרים עוקבים – המכפלה מתחלקת ב-2. על מנת להמחיש את התכונה ניתן להיעזר במספר דוגמאות מספריות. בתרגיל 3 יגלו התלמידים את התכונה שמכפלה של כל שלושה מספרים עוקבים מתחלקת ב-3 ללא שארית. בסעיף ג' התלמידים נדרשים ליישם את התכונה. במידה והתרגילים מעלים קשיים, ניתן לבקש להציג דוגמאות מספריות בביטויים השונים ולבדוק אם המספרים מתחלקים או לא.

תורת המספרים

בשאלה 3 מתבקשים התלמידים לבנות ביטויים על פי דרישות בסעיפים השונים. אם התלמידים מתקשים, יש לבקש מהם לבנות ביטויים מספריים בהתחלה, ואז לראות חוקיות בביטויים מספריים שבנו ולנסות ל"תרגם" את הביטויים לביטויים עם משתנים. חשוב שלאחר שהתלמידים יבנו את הביטויים, הם יציבו לתוכם ערכים מספריים, ויבדקו שמתקבל מספר מתאים. בשאלה 4, סעיף ב', תלמידים מתבקשים להוכיח שביטוי נתון מתחלק ב- 6. ניתן לעשות זאת על ידי שיטת "מיצוי כל האפשרויות". אם הולכים בדרך זו, חשוב להסביר לתלמידים את הרציונל של ההוכחה. ניתן להראות שקיימות שלוש אפשרויות ואם נוכיח את נכונות הטענה לכל אפשרות בנפרד, אז הוכחנו את התכונה. על מנת להמחיש את הנושא, ניתן להיעזר בדוגמאות מספריות.

<u>תשובות והערות לתרגילים:</u>

(1) א) כל המכפלות מתחלקות ב-2. בכל אחת מהמכפלות יש גורם זוגי, כל מספר זוגי מתחלק ב-2.

ב) הביטויים : n(n+1) ו- n(n-1) הם מכפלת 2 מספרים עוקבים. בכל זוג מספרים עוקבים אחד מהם זוגי והאחר אי-זוגי, לכן המכפלה מתחלקת ב-2.

ג) כדי שהביטוי יהיה מספר שלם, המונה חייב להיות זוגי. כלומר לפחות אחד המספרים זוגי. כל מספר זוגי מתחלק ב- 2.

① $\frac{3n(3n-1)}{2}$ הוא מספר שלם. אם n זוגי, הביטוי מתחלק ב-2. אם n אי-זוגי, הביטוי 3n-1 זוגי.

(הסבר נוסף: 3n ו – 3n-1 הם מספרים עוקבים, ולפי סעיף ב' הם תמיד מתחלקים ב- 2 ללא שארית).

② $\frac{n(n+2)}{2}$ הוא לא בהכרח מספר שלם. אם n זוגי, הביטוי מתחלק ב-2. אם n אי-זוגי, גם n+2 אי-זוגי. מכפלת 2 מספרים אי-זוגיים היא אי-זוגית, ולכן הביטוי לא מתחלק ב-2.

③ $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ מספר שלם. n+1 ו-n+2 הם מספרים עוקבים. בכל זוג מספרים עוקבים אחד מהם זוגי והשני אי-זוגי (סעיף ב').

④ $\frac{n(n+3)}{2}$ מספר שלם. אם n זוגי, n+3 הוא אי-זוגי, ולהיפך, אם n אי-זוגי, n+3 זוגי.

⑤ $\frac{n(5n+1)}{2}$ מספר שלם. אם n אי-זוגי, גם 5n אי-זוגי, ולכן 5n+1 אי-זוגי. ולהפך אם n זוגי.

(2) א) $1\cdot2\cdot3 = 6$, $5\cdot6\cdot7 = 210$, $10\cdot11\cdot12 = 132$.

ב) הביטוי : n(n+1)(n+2) הוא מכפלה של 3 מספרים עוקבים. בכל מכפלה כזו לפחות אחד המספרים זוגי, ולכן המכפלה מתחלקת ב-2. מספר אחד מבין המספרים מתחלק ב-3, ולכן המכפלה כולה מתחלקת ב-3. כיוון שהמכפלה מתחלקת ב-2 וב-3, היא מתחלקת גם במכפלתם, כלומר ב-6.

ג)① *נכון* - הביטוי n(n+1)(n+2) מתחלק ב-6. (לפי סעיף ב').

② *נכון* - הביטוי n(n+2)(n+4) מתחלק ב-3. כדי שביטוי יתחלק ב-3, לפחות אחד מגורמיו צריך להתחלק ב- 3.

גורמי המכפלה הם 3 מספרים זוגיים עוקבים, או 3 מספרים אי-זוגיים עוקבים, ולכן לפחות אחד מהם מתחלק ב-3.

הסבר נוסף:

אם $n=1(\text{mod}3) \Leftarrow n+2=0(\text{mod}3) \Leftarrow n+4=1(\text{mod}3)$. כלומר n+2 מתחלק ב-3.

אם $n=2(\text{mod}3) \Leftarrow n+2=1(\text{mod}3) \Leftarrow n+4=0(\text{mod}3)$. כלומר n+4 מתחלק ב-3.

③ הביטוי $\frac{n(n+2)(n+4)}{6}$ לא בהכרח מספר שלם. אם n זוגי, הגורמים הם 3 מספרים זוגיים עוקבים, ולכן אחד מהם מתחלק ב-3. כלומר הביטוי מתחלק ב-6. אם n אי-זוגי, הגורמים הם 3 מספרים אי-זוגיים עוקבים, מכפלתם אי-זוגית, ולכן הביטוי לא מתחלק ב-6. הוא מתחלק ב-3.

מספיק גם להביא דוגמה נגדית אחת, למשל עבור $n = 1$.

④ הביטוי $\frac{n(n+4)(n+7)}{6}$ לא בהכרח מספר שלם. אם n זוגי, לפחות אחד מגורמיו מתחלק ב-3, ולכן הביטוי מתחלק ב-6. אם n אי-זוגי, n+4 זוגי, ולכן הביטוי כולו מתחלק ב-2 , אבל לא בהכרח ב-3, ולכן לא מתחלק ב-6. (1,5,8).

תורת המספרים

מספיק להביא דוגמה נגדית עבור $n = 1$.

(3) א) ביטוי שהוא מכפלה של 4 מספרים עוקבים : $n(n+1)(n+2)(n+3)$. לפחות שניים מתוכם זוגיים, ולכן הביטוי מתחלק ב-4.
ב) הביטוי מתחלק ב-6. מבין 3 מספרים עוקבים לפחות אחד מהם מתחלק ב-3. ולכן הביטוי מתחלק ב-6. כיוון שהביטוי מתחלק גם ב-4 וגם ב-3 הוא מתחלק גם ב-12. לפחות אחד מהמספרים

מתחלק ב- 4, לכן הביטוי מתחלק גם ב-24 ($4\cdot6=24$).

ג) במכפלה של 5 מספרים עוקבים לפחות אחד מתחלק ב-5.

לדוגמה : $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$.

(4) א) לפי הנתון הביטוי $n(n+1)(2n+1)$ מתחלק ב-6. (סכום ריבועי המספרים הוא מספר שלם והוא שווה למנת הביטוי ב-6). כיוון שהביטוי מתחלק ב-6, הוא מתחלק גם ב-2 וגם ב-3.

ב) דרך נוספת להוכחה : $n(n+1)$ תמיד מתחלק ב- 2, לכן על מנת להוכיח שהביטוי $n(n+1)(2n+1)$ מתחלק ב- 6 ללא שארית, חייבים להוכיח ש- $n(n+1)(2n+1)$ מתחלק ב- 3 ללא שארית.

קיימות שלוש אפשרויות : $n = 0 \pmod 3$, $n = 1 \pmod 3$, $n = 2 \pmod 3$. נוכיח שבשלושת המקרים הביטוי $n(n+1)(2n+1)$ מתחלק ב- 3.

אם $n = 0 \pmod 3$, המכפלה מתחלקת בטוח ב- 3, כי אחד הגורמים מתחלקים ב- 3.

אם $n = 1 \pmod 3$: $(\mathrm{mod}\ 3) = 1\cdot2\cdot3 \pmod 3 = 0 \pmod 3$

$n(n+1)(2n+1)$, ולכן המכפלה מתחלקת ב- 3.

אם $n = 2 \pmod 3$: $(\mathrm{mod}\ 3) = 2\cdot3\cdot5 \pmod 3$

$n(n+1)(2n+1) = 0 \pmod 3$.

בשלושת המקרים הוכחנו שהמכפלה מתחלקת ב-3. לכן השבר הוא מספר שלם.

שיעור רביעי: מספרים ראשוניים (המשך), עמ' 53 (כשני שיעורים)

מושגים מרכזיים: **הוכחת משפט: קיימים אינסוף מספרי ראשוניים.**

המלצה להוראה:

בחלק האחרון של הפרק התלמידים מוכיחים את אחד המשפטים המרכזיים של האלגברה המוכיח שקיימים אין-סוף מספרים ראשוניים. ההוכחה מתבצעת בדרך השלילה. בשאלה 1 מניחים בשלילה שקיים מספר ראשוני גדול ביותר – p_N. בשאלה 3, סעיף ז', מגיעים לסתירה. מכך מסיקים שההנחה לא נכונה ולא קיים מספר ראשוני גדול ביותר, לכן קיימים אין-סוף מספרים ראשוניים. ההוכחה בנויה מכמה וכמה שלבים שמובילים לסתירה.

מומלץ להתחיל את השיעור מהצגת ההיגיון שמאחורי הוכחה בדרך השלילה. מומלץ להסביר כי לפעמים על מנת להוכיח תכונה או משפט, מניחים הנחה שדווקא סותרת את התכונה שרוצים להוכיח ואם מגיעים לסתירה באחד משלבי ההוכחה (ובתנאי שכל השלבים הוכחו כראוי), סימן שההנחה הייתה שגויה. ייתכן שהתלמידים יישאלו כיצד ניתן לדעת מתי להשתמש בסוג זה של הוכחה. התשובה לכך מורכבת וכדאי להסביר שניסיון רב בתחום עוזר להחליט מתי משתמשים בסוג זה של הוכחה ובשיעור שלפנינו אנחנו נראה פרי עבודתם ומחשבותיהם של מתמטיקאים גדולים שעסקו בנושא.

מומלץ לסייע לתלמידים במהלך ההוכחה, ורק לקבוצות חזקות מומלץ לתת להתמודד עם ההוכחה באופן עצמאי לגמרי (מתרגיל 1 עד תרגיל 3). בתרגיל ראשון מניחים שקיים מספר סופי של מספרים ראשוניים והמספר הראשוני הגדול ביותר הוא p_N. במידה שהתלמידים יתקשו להבין את הסימונים, יש להדגיש את התפקיד של p (ערך של מספר ראשוני) ואת התפקיד של N (מספר סידורי של מספר ראשוני). כדאי להסביר את ההבדל בין שניהם על ידי מתן דוגמאות. בתרגיל מס' 2 התלמידים מגלים שהמכפלה

$p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6 .... \cdot p_N$ מתחלקת בכל אחד מהמספרים הראשונים שהם הגורמים שלה.

בתרגיל מס' 3 מגדירים מספר $p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6 .... \cdot p_N + 1$ שהוא העוקב של המספר

$p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6 .... \cdot p_N$. בתרגיל זה חוקרים את התכונות של המספר העוקב. על מנת לטפל בקושי שיכול להתעורר עקב סימונים, ניתן להדגים את שני המספרים על ידי בחירת חמישה מספרים ראשוניים עוקבים ($N = 5$) וחקירת התכונות שלהם. כך למשל, התלמידים מגלים שהמספר

תורת המספרים

$p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6\cdots p_N+1$ הוא לא מספר ראשוני, כי הוא גדול יותר מהמספר $p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6\cdots p_N$. התלמידים מגלים שהמספר $p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6\cdots p_N+1$ לא מתחלק באף מספר ראשוני שקטן ממנו, וכך מגיעים למסקנה שהוא מספר ראשוני (סעיף ו').

זו סתירה לכך שהמספר p_N הוא המספר הראשוני הקטן ביותר.

חשוב מאוד לסייע לתלמידים לראות את הקשר בין הסעיפים השונים. יש בשאלה הרבה תובנות וריבוי הדברים יכול לבלבל. יש לקשר בין הסעיפים ולראות ביחד כיצד המסקנות נובעות אחת מהשנייה, כיצד מגיעים לסתירה וכיצד הסתירה סותרת את ההנחה שבשאלה הראשונה. בסיום ההוכחה מומלץ לשאול את התלמידים "מה בעצם הוכחנו?".

<u>תשובות והערות לתרגילים:</u>

(1) א) 3. N מספרים ראשוניים.

ב) $P_6=13$ $\quad p_7=17$ $\quad p_8=19$ $\quad p_9=23$ $\quad p_{10}=29$. (ניתן לראות מהנפה בעמ' 44)

(2) א) המספר מתחלק גם ב-2 וגם ב-3. המספר הראשון במכפלה הוא 2 והשני הוא 3 (שניהם מספרים ראשוניים). ולכן המכפלה מתחלקת בשניהם.

ב) המספר מתחלק בכל אחד מגורמיו. כלומר בכל אחד מהמספרים p_1-p_n .

לדוגמה, המספר מתחלק ב- 7 וב- 11.

ג) כן. עבור $p_k>p_n$ המכפלה לא תתחלק ב- p_k . זו מכפלת גורמים ראשוניים, ולכן היא מתחלקת בכל מהגורמים המופיעים בה, אבל לא בגורם ראשוני שאינו נמצא בה.

בהנחה ש- p_N הוא המספר הראשוני הגדול ביותר, והמספר הנתון הוא מכפלה של כל המספרים הראשונים, אין מספר ראשוני שהמכפלה הנתונה לא מתחלקת בו.

(3) א) p_n+1 הוא המספר העוקב ל- p_n . אם p_n הוא מספר ראשוני, אזי המספר העוקב לו הוא מספר זוגי, ולכן אינו ראשוני. למעט 2 המספרים הראשוניים הראשונים, 2 ו-3, אין בין המספרים הראשוניים מספרים עוקבים.

לא. לפי ההנחה, p_N הוא המספר הראשוני הגדול ביותר. מספרים ראשוניים הם מספרים טבעיים, לכן ברור שהמספר $p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6\cdots p_N+1$ גדול מ- p_N. לכן לפי ההנחה ש- p_N הוא המספר הראשוני הגדול ביותר, המספר לא יכולה להיות ראשוני.

ב) מספר מהסוג 2K+1 לא יכול להיות מספר זוגי. 2K הוא מספר זוגי, המספר העוקב שלו חייב להיות אי-זוגי.

ג) המספר לא מתחלק ב- 2. המספר $p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6\cdots p_N$ הוא מספר זוגי, כי 2 הוא אחד הגורמים שלו. לכן המספר העוקב לו חייב להיות אי זוגי, ולכן לא מתחלק ב- 2.

ד) המספר 3K+1 לא מתחלק ב-3. המספר 3K הוא כפולה של 3, ולכן מתחלק ב-3, לכן העוקב שלו לא יכול להתחלק ב-3 . $3K+1=1(\text{mod}3)$.

ה) המספר מתחלק ב-3 כיוון שהוא כפולה של 3. $P_2=3$.

המספר לא מתחלק ב- 3 מכיוון שהוא עוקב של $p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6\cdots p_N$ שמתחלק ב- 3.

לכן $\mathbf{p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6\cdots p_N}+1=1\ (\text{mod}\ 3)$

ו) המכפלה מתחלקת בכל אחד מגורמיה, לכן היא מתחלקת בכל אחד מהמספרים הראשוניים p_1-p_N , אבל במספר $p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6\cdots p_N+1$ - המכפלה לא מתחלקת באף מספר ראשוני, כי היא המספר העוקב של מספר $p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6\cdots p_N$, שהוא מתחלק ללא שארית בכל אחד מהמספרים הראשוניים.

ז) סתרנו את התכונה: "לכל מספר גדול מ – 2 יש לפחות מחלק ראשוני אחד (או קטן ממנו או שווה לו)."

ח) תמיד כשמגיעים לסתירה, סימן שההנחה הראשונית לא נכונה. וההנחה הראשונית הייתה שקיים מספר ראשוני הכי גדול.

בשאלה 3 הצלחנו לבנות מספר $p_1\quad p_2\quad p_3\quad p_4\quad p_5\quad p_6\cdots\quad p_N+1$ שהוא מספר גדול יותר מהמספר הראשוני הכי גדול שהנחנו שקיים (p_N), כך שהמספר החדש לא מתחלק באף מספר ראשוני שקטן ממנו, ולכן הוא עצמו ($p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6\cdots p_N+1$) מספר ראשוני. בנינו מספר ראשוני שגדול יותר ממספר ראשוני הכי גדול לפי ההנחה. זו סתירה.