פיתגורס

הפרק עוסק במשפט פיתגורס ובשימושיו לחישוב אורכי קטעים מיוחדים במשולש – גובה ותיכון. הפרק דן בנושאים שפחות מודגשים בתכנית הלימודים ומשלב שימוש בטכניקה אלגברית מתקדמת. אחד הנושאים בפרק הוא משפט הפוך למשפט פיתגורס ושימושיו. נושא ההכללה הוא אחד הנושאים המרכזיים בפרק. הרבה פעמים תלמידים מתבקשים ללמוד שיטה למציאת אורך של קטע מיוחד ובשאלה הבאה מתבקשים להכליל את התוצאה שהתקבלה ולהגיע לנוסחה כללית. מבנה זה של הפרק חשוב במיוחד בכיתה ח', בה התלמידים נפגשים לראשונה עם גיאומטריה דדוקטיבית שדורשת הוכחות פורמאליות והכללות. במהלך הפרק עובדים עם מושגים רבים שקשורים למשולש – זוויות במשולש, צלעות, גובה, תיכון, שטח, משולשים דומים ועוד. כך לימוד הפרק יכול להוות סיכום של לימוד וחזרה על שנושא המשולשים במסגרת תוכנית הלימודים הבית ספרית.

שיעור ראשון: **משולשים שאינם ישרי – זווית**, עמ' 65 (כשני שיעורים).

מושגים מרכזיים: חישוב אורכי צלעות במשולש חד-זוויות ובמשולש קהה-זווית באמצעות העברת גובה.

המלצה להוראה:

מומלץ להתחיל את השיעור מהתזכורת של משפט פיתגורס שמופיעה בשיעור, בעמ' 65 (במסגרת). לאחר מכן לפתור את תרגיל 1 בעבודה עצמית (בזוגות או בקבוצות קטנות). למרות שהתרגיל בנוי בצורה מדורגת ומיועד לעבודה עצמית, כדאי לעבור על הסעיפים ה' – ז' אשר מצריכים הצבה נכונה של ביטוי במקום h^2 ופתרון של שוויון באמצעות טכניקה אלגברית נכונה. יש לבדוק את הנכונות של פתיחת סוגריים באמצעות חוק הפילוג המורחב וכינוס נכון של איברים דומים. רמת התרגילים בשיעור גבוהה בגלל השימוש באותיות (a, b, p, h).

בסעיף ז' מומלץ לדון מדוע $c^2 < a^2 + b^2$. ($c^2 = a^2 + b^2 – 2ap$, ולכן $c^2 < a^2 + b^2$, מכיוון ש- a, p מספרים חיוביים). בסיום התרגיל כדאי להכליל את המסקנה ולשאול האם הביטויים $a^2 < c^2 + b^2$, $b^2 < a^2 + c^2$ גם נכונים. התשובה היא "כן", מכיוון שניתן להעביר גבהים גם מקדקודים נוספים ולעשות את אותו התהליך. חשוב שלאחר ביצוע תרגיל זה התלמידים יבינו שבכל משולש חד-זוויות, ריבוע של צלע אחת קטן מסכום הריבועים של שתי הצלעות הנוספות.

בשלב הבא עוברים לפתרון של תרגיל 2 שמטפל במקרה של משולש קהה-זווית. מקרה זה שונה מהמקרה הקודם, מכיוון שגובה מקדקוד שצמוד לזווית חדה נופל מחוץ למשולש. מקרה זה הוא יותר מורכב, ולכן יש לבדוק שהתלמידים מבינים לאיזה משולשים ישרי-זווית יש להתייחס בפתרון. המסקנה בסעיף ב' היא שריבוע של צלע מול זווית קהה גדול מסכום הריבועים של הצלעות האחרות. יש להניח שחלק מהתלמידים לא ישימו לב שמדובר בצלע שמול הזווית הקהה, ולכן יש להדגיש את העניין על-ידי השאלה "האם נכון גם ש- $a^2 > c^2 + b^2$?" התשובה היא "לא". ועל מנת להסביר את התשובה יש להוריד גובה מקדקוד שצמוד לזווית הקהה ולראות שהחישובים דומים לשאלה מספר 1.

רק אחרי שהתלמידים הבינו את ההבדל בין משולש חד-זוויות למשולש קהה-זווית ניתן לעבור לשאלות 3 ו- 4. בשאלה 4 מומלץ להתייחס להסבר הגאומטרי וגם להסבר האלגברי (שניהם מופיעים בתשובות).

תשובות והערות לתרגילים:

(1) א) משולש AHB הוא משולש ישר-זווית. ניצביו הם: $a\text{-}p$, h. היתר הוא c. נציב את הנתונים במשפט פיתגורס, נקבל: $c^2=(a-p)^2+h^2$.

ב) עפ"י הסרטוט $b>h$ וכן $a>a-p$. וכך גם לגבי הריבועים של ביטויים אלה. נציב זאת בסעיף א' ונקבל $c^2<a^2+b^2$.

ג) משולש AHC הוא משולש ישר-זווית. ניצביו הם: p , h. היתר b. נציב את הנתונים במשפט פיתגורס, נקבל: $b^2=h^2+p^2$, $\Leftarrow$ $h^2=b^2-p^2$.

ד) $c^2=(a-p)^2+b^2-p^2$.

ה) $(a-p)^2=a^2-2ap+p^2$.

ו) $c^2=a^2-2ap+p^2+b^2-p^2$.

ז) נכנס את האיברים הדומים בשוויון שקבלנו בסעיף ו', נקבל: $c^2=a^2+b^2-2ap$.

השוויון מתאים למסקנה שבסעיף ב'. יש לחסר $2ap$ מהביטוי a^2+b^2 כדי לקבל את c^2. כלומר: $c^2<a^2+b^2$.

פיתגורס

(2) א) נסמן את נקודת החיתוך של הגובה h עם המשך הצלע BC בנקודה H. משולש AHC הוא ישר-זווית. ניצביו הם h ו- p , היתר b. נציב את הנתונים במשפט פיתגורס, נקבל: $b^2=h^2+p^2 \Leftarrow$ $h^2=b^2-p^2$.
משולש AHB הוא משולש ישר-זווית. ניצביו הם: h ו-$a+p$. היתר הוא c. נציב את הנתונים במשפט פיתגורס, נקבל: $c^2=(a+p)^2+h^2$, $\Leftarrow h^2=c^2-(a+p)^2$.
נציב את הביטוי הראשון בשני, ונקבל $b^2-p^2=c^2-(a+p)^2$.
לאחר פתיחת הסוגריים וכינוס האיברים הדומים, נקבל: $b^2=c^2-a^2-2ap$ או: $c^2=a^2+b^2+2ap$.
ב) $c^2>a^2+b^2$. יש לחבר לביטוי a^2+b^2 כדי לקבל את c^2. כלומר $c^2>a^2+b^2$.

(3) א) $m^2<a^2+n^2$. ב) $b^2+e^2<n^2$. ג) $YE^2<YS^2+ES^2$. ד) $YU^2+OU^2>YO^2$.

(4) לא יתכן. לפי תרגיל 2 , כאשר מתקיים השוויון מהסוג $c^2>a^2+b^2$ הזווית שמול צלע c היא זווית קהה. אם שלושת האי-שוויונות מתקיימים, שלוש הזוויות במשולש צריכות להיות קהות וזה לא יתכן, כיוון שסכום הזוויות במשולש הוא 180°. הסבר אלגברי: אם נניח בשלילה שכל שלושת האי שוויונות נכונים, ונחבר את כל המחוברים בצד ימין ובצד שמאל, נגיע לאי שוויון:
$AB^2 + AC^2 + BC^2 > 2AB^2 + 2AC^2 + 2BC^2$. אי-שוויון זה לא הגיוני, לכן שלושת האי-שוויונות לא יכולים להיות נכונים.

שיעור שני: משפט פיתגורס ההפוך, עמ' 68 (שיעור אחד)

מושגים מרכזיים: **משפט פיתגורס ההפוך**

המלצה להוראה:
בתחילת השיעור יש להסביר מהו משפט ומהו משפט *הפוך*. ניתן להדגים משפט בצורה כללית: "אם מתקיים A, אז מתקיים B", והמשפט ההפוך לו "אם מתקיים B, אז מתקיים A". מומלץ גם להדגים את הנושא באמצעות דוגמה מחיי היום-יום: "אם אני הולכת לסרט, אני לובשת שמלה אדומה". והמשפט ההפוך: "אם אני לובשת שמלה אדומה, אז אני הולכת לסרט". דוגמא נוספת: "אם יורד גשם יש עננים." האם זה מחייב תמיד שהמשפט ההפוך נכון? האם כאשר יש עננים תמיד יורד גשם?. כדאי לדון בשני משפטים אלו ולהסביר שלא תמיד כאשר משפט הוא נכון, גם משפט שהפוך לו הוא נכון. בדוגמה שלנו, יכול להיות שכל פעם כשאני הולכת לסרט אני לובשת שמלה אדומה אבל זה לא אומר שלא אלבש שמלה אדומה גם למקומות אחרים. לאחר מכן כדאי לדבר על משפט *שקול* למשפט נתון. הנושא של משפט ומשפט שקול נלמד לעומק במסגרת תחום של לוגיקה מתמטית ולא זוכה להתייחסות במסגרת תכנית הלימודים הפורמלית. לא מומלץ להעמיק בכל השיקולים הלוגיים שמצדיקים שקילות בין שני משפטים (ובפרט בטבלת אמת), אך כדאי להתייחס בצורה אינטואיטיבית ולהסביר שמשפט שקול למשפט "אם אני הולכת לסרט, אני לובשת שמלה אדומה" הוא: "אם לא לבשתי שמלה אדומה, סימן שלא הלכתי לסרט", או בהכללה, משפט שקול למשפט: "אם מתקיים A, אז מתקיים B" הוא "אם לא מתקיים B, אז לא מתקיים A". ההבנה של משפט שקול חשובה לצורך פתרון תרגילים 2, 3.
לאחר הבהרת המושגים *משפט*, *משפט הפוך* ו*משפט שקול*, ניתן לגשת לפתרון של תרגיל 1. בתרגיל מוכיחים את משפט פיתגורס ההפוך באמצעות שימוש במסקנות מתרגילים 1, 2 מהשיעור הקודם. לאחר ההוכחה, מומלץ לרשום על הלוח את משפט פיתגורס, את המשפט השקול למשפט פיתגורס (אם לא מתקיים $c^2=a^2+b^2$, אז הזווית שמול צלע c לא ישרה) ואת משפט פיתגורס ההפוך ומשפט השקול למשפט פיתגורס ההפוך (אם הזווית מול צלע c לא ישרה, אז לא מתקיים $c^2=a^2+b^2$). משפטים אלה יעזרו לתלמידים להשיב על תרגילים 5 – 6 שאת פתרונם מומלץ לבדוק על הלוח.

תשובות והערות לתרגילים:

(1) אילו הזווית $\measuredangle A$ הייתה חדה, הנתונים היו דומים לאלה שבתרגיל 1 ז' שבעמ' 66. בתרגיל זה BC הוא c. AB הוא b. AC הוא a. נציב את הנתונים באי-שוויון $c^2<a^2+b^2$ שהוכחנו שם, נקבל: $BC^2<AB^2+AC^2$. אי-שוויון זה סותר את הנתון $BC^2=AB^2+AC^2$, ולכן הזווית $\measuredangle A$ לא יכולה להיות זווית חדה.

(2) אילו הזווית $\measuredangle A$ הייתה קהה, הנתונים היו דומים לאלה שבתרגיל 2 ב' שבעמ' 66. בתרגיל זה BC הוא c. AB הוא b. AC הוא a.
נציב את הנתונים באי-שוויון $c^2>a^2+b^2$ שהוכחנו שם, נקבל: $BC^2>AB^2+AC^2$.

פיתגורס

אי-שוויון זה סותר את הנתון $BC^2=AB^2+AC^2$, ולכן הזווית $\measuredangle A$ לא יכולה להיות זווית קהה.

(3) מכיוון שהזווית $\measuredangle A$ לא יכולה להיות חדה ולא יכולה להיות קהה, היא בהכרח ישרה.
ולכן משולש ABC הוא משולש ישר-זווית.

(4) אם במשולש מתקיים השוויון $BC^2=AB^2+AC^2$, המשולש הוא ישר-זווית. הזווית שמול צלע BC היא זווית ישרה.

(5) סעיפים א ו-ד מתאימים למשפט ההפוך למשפט פיתגורס.
סעיפים ב ו-ג מתאימים למשפט פיתגורס.

(6) א) המשולש ישר-זווית. עפ"י משפט פיתגורס ההפוך. $(8^2+15^2=17^2)$.
ב) המשולש אינו ישר-זווית. עפ"י משפט פיתגורס. $(7^2+7^2\neq 100^2)$.
ג) המשולש ישר-זווית. עפ"י משפט פיתגורס נחשב את אורך הצלע AC במשולש ישר- זווית ACD.
נקבל: $50^2+AC^2=130^2 \Leftarrow AC=120$. משולש ABC הוא ישר-זווית עפ"י משפט פיתגורס ההפוך.
$(72^2+96^2=120^2)$.

שיעור שלישי: גבהים, עמ' 70 (כשני שיעורים)

מושגים מרכזיים: חישוב גבהים באמצעות שימוש במשפט פיתגורס

המלצה להוראה:
בשאלה 1 לומדים כיצד לחשב גבהים במשולש חד-זוויות שאורכי צלעותיו ידועים. מומלץ לפתור את התרגיל בעבודה עצמית (בזוגות או בקבוצות) ולבדוק את התשובה שהתקבלה. מומלץ גם לבקש לסכם את השיטה במילים. בתרגיל 2 לומדים לחשב את הגובה במשולש קהה-זווית, ולאחר מכן להשתמש בשטח המשולש על מנת לחשב את שני הגבהים הנוספים. בשאלה 3 לומדים לחשב גובה במשולש ישר זווית בשלוש דרכים שונות: שימוש במשפט פיתגורס, שימוש בדמיון משולשים ושימוש בשטח של משולש.
מומלץ לבצע תרגילים 2 – 3 בעבודה עצמית ולבדוק על הלוח את התוצאות שהתקבלו.

תשובות והערות לתרגילים:

(1) א) $p^2+h^2=13^2 \Leftarrow h^2=13^2-p^2$.
ב) במשולש ABH: $(21-p)^2+h^2=20^2 \Leftarrow h^2=20^2-(21-p)^2$.
ג) כיוון ש-h בסעיף א' שווה ל-h בסעיף ב', נקבל: $20^2-(21-p)^2= 13^2-p^2$.
ד) $400-(441-42p+p^2)=169-p^2 \Leftarrow 400-441+42p-p^2 =169-p^2 \Leftarrow 210=42p \Leftarrow 5=p$ ס"מ.
ה) $h^2=13^2-p^2 \Leftarrow h^2=13^2-5^2 \Leftarrow h^2=144 \Leftarrow 12=h$ ס"מ.

(2) א) נוריד גובה FH מקודקוד F אל המשך צלע UN. חישוב הגובה יהיה דומה לחישוב בתרגיל 1.
במשולש ישר זווית FHU: $p^2+h^2=15^2$, על פי משפט פיתגורס.
במשולש ישר זווית FHN $(28+p)^2+h^2=41^2$. לאחר בידוד h^2 משתי המשוואות, הצבה, פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים, נקבל: $p=12$ ס"מ. נציב במשוואה $h^2=15^2-p^2$, נקבל $h=9$ ס"מ.
ב) שטח משולש הוא מחצית מכפלת צלע בגובה שעליה. נחשב את שטח המשולש עפ"י צלע UN והגובה שעליה אותו חישבנו בסעיף א'. נקבל: $\frac{1}{2}\cdot 28\cdot 9=126$. ניעזר בתוצאה לחישוב UG, שהוא הגובה לצלע FN.

$\frac{1}{2}\cdot 41\cdot UG=126 \Leftarrow UG=6.146$ ס"מ.

באופן דומה נחשב את NE שהוא הגובה לצלע FU (הגובה מגיע להמשך הצלע FU)

$\frac{1}{2}\cdot 15\cdot NE=126 \Leftarrow NE=16.8$ ס"מ.

(3) א) משולש TOP הוא משולש ישר-זווית, עפ"י משפט פיתגורס נקבל: $OP^2+15^2=25^2 \Leftarrow PO=20$.
ב) ①חישוב PH בדומה לחישוב בתרגיל 1.

פיתגורס

OH=25-P   TH=P

במשולש PHT : $p^2+h^2=15^2$.

במשולש POH : $(25-p)^2+h^2=20^2$.

לאחר בידוד h^2 משתי המשוואות, הצבה, פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים, נקבל : p=9 ס״מ.

נציב במשוואה $h^2=15^2-p^2$, נקבל h=12 ס״מ.

② המשולשים TOP ו- TPH דומים. התלמידים צריכים להסביר מדוע משולשים אלה דומים.

במשולשים דומים יש יחס קבוע בין הצלעות המתאימות.

$\frac{PO}{HP}=\frac{TO}{TP} \Leftarrow \frac{20}{HP}=\frac{25}{15} \Leftarrow$ HP=12 ס״מ.

③ שטח משולש הוא מחצית מכפלת צלע בגובה שיורד אליה. נחשב את שטח המשולש עפ״י מחצית מכפלת הניצבים. נקבל : $\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 15=150$. ניעזר בתוצאה לחישוב PH הגובה לצלע TO.

$\frac{1}{2}\cdot 25\cdot PH=150 \Leftarrow$ PH=12 ס״מ.

(4) לדוגמה : לפי נתוני תרגיל 2 בעמ׳ 71. $p=\frac{28+15+41}{2}=42$.

$\text{שטח}=\sqrt{42(42-28)(42-15)(42-41)} \Leftarrow$ שטח= 126 סמ״ר.

שיעור רביעי: תיכונים, עמ׳ 73 (כשני שיעורים)

מושגים מרכזיים: **חישוב תיכונים באמצעות שימוש במשפט פיתגורס**

המלצה להוראה:

בשיעור זה התלמידים מוכיחים נוסחה כללית של אורך התיכון כפונקציה של שלוש צלעות של משולש. במהלך ההוכחה התלמידים נעזרים בהוכחות שנעשו בשיעור הראשון. בשאלות 1 – 3 תלמידים לומדים שיטה למצוא תיכון כאשר שלוש צלעות נתונות. כל תרגיל מהווה הכנה לתרגיל הבא, ולכן חשוב לבצעם לפי הסדר. במידה שהתלמידים לא ייראו קשרים בין התרגילים, יש להדגיש קשרים אלה. המשולש ABM בתרגיל 2 זהה למשולש ABC בתרגיל 1. ותרגיל 2 מהווה שלב ביניים בפתרון תרגיל 3. תרגיל 4 מהווה הכללה של תרגיל 3 ומתאים רק לקבוצות חזקות. בקבוצות חזקות פחות מומלץ לעצור בתרגיל 3 ולא להציג את ההוכחה של הנוסחה הכללית שמופיעה בסעיף 14׳. ניתן להציג את הנוסחה, להסביר מה מייצגת כל אות וללמוד להשתמש בנוסחה. לקבוצות חזקות יש להציג את ההוכחה של הנוסחה ולהקפיד לבדוק שימוש נכון בטכניקה אלגברית.

תשובות והערות לתרגילים:

(1) במשולש AHB יש יותר נתונים ולכן נחשב תחילה את BH עפ״י משפט פיתגורס. $BH^2+20^2=25^2$

$\Leftarrow$ BH=15. נחשב את אורך AC עפ״י משפט פיתגורס במשולש

HC=36-15=21.

$21^2+20^2=AC^2$

$\Leftarrow$ AC=29 ס״מ.

(2) כדי לחשב את AM יש לחשב תחילה את BH. החישוב כפי שנעשה בתרגיל 1. במשולש AHB :

$BH^2+20^2=25^2$

$\Leftarrow$ BH=15 ס״מ. $BM=MC=\frac{1}{2}\cdot 72=36$. HM=36-15=21.

נחשב את אורך AM עפ״י משפט פיתגורס במשולש AHM :

$21^2+20^2=AM^2 \Leftarrow$ AM=29 ס״מ.

(3) נוריד גובה UH לצלע MG. נסמן UH=h, HG=p. החישוב כמו בתרגיל 1 בעמ׳ 70. במשולש UHG :

פיתגורס

$p^2+h^2=6^2$. במשולש UHM : $(10-p)^2+h^2=8^2$. לאחר בידוד h^2 משתי המשוואות, הצבה, פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים, נקבל : $p=3.6$. נציב במשוואה $p^2+h^2=6^2$, נקבל $h=4.8$.
$AM=AG=1/2*10=5$. $AH=5-3.6=1.4$ במשולש UHA : $UA^2=4.8^2+1.4^2$ $\Leftarrow$ $UA=5$ ס"מ.

(4) א) $BM=MC=a/2$.
ב)להוכחת השוויון ניעזר בתרגיל 1 ז' בעמ' 66 בו הוכחנו : $c^2=a^2+b^2-2ap$.
צלע c בתרגיל 1 היא b בתרגיל זה. צלע a היא $a/2$. צלע b היא x. נציב זאת בשוויון שקיבלנו.
$b^2=(a/2)^2+x^2-2(a/2)\,p$. במקום להיעזר בתרגיל 1 ז', אפשר לחשב כפי שחישבנו בתרגיל 1 בעמ' 70.
ג) להוכחת השוויון ניעזר בתרגיל 2 א' בעמ' 66 בו הוכחנו: $c^2=a^2+b^2+2ap$.
צלע c בתרגיל 2 היא c בתרגיל זה. צלע a היא $a/2$. צלע b היא x. נציב זאת בשוויון שקבלנו.
$c^2=(a/2)^2+x^2+2(a/2)\,p$.
ד) נחבר את השוויונות מסעיפים ב' ו-ג',
$b^2+c^2=(a/2)^2+x^2-2(a/2)p+(a/2)^2+x^2+2\ (a/2)p$
לאחר כינוס איברים דומים, נקבל : $b^2+c^2=2(a/2)^2+2x^2$.

ה) $2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=2\cdot\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$

ו) נכפול את השוויון מסעיף ד' ב-1/2, נקבל : $b^2+c^2=2(a/2)^2+2x^2|*1/2$
$\Leftarrow$ $\frac{b^2+c^2}{2}=\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2$. $\Leftarrow$ $\frac{b^2+c^2}{2}-\left(\frac{a}{2}\right)^2=x^2$.

ז) נציב את הנתונים מתרגיל 3 בנוסחה, נקבל : $\frac{8^2+6^2}{2}-\frac{10^2}{4}=x^2$ $\Leftarrow x^2=25 \Leftarrow$ $x=5$. כפי שקיבלנו בתרגיל 3.