תורת הקבוצות

בעבר הנושא תורת הקבוצות היה כלול בתכנית הלימודים, לכן סביר שהוראתו מתאימה לתלמידים בחטיבת הביניים. ישנם שני ענפים עיקריים בתורת הקבוצות – תורת הקבוצות הנאיבית ותורת הקבוצות האקסיומטית. בבית-הספר ובשנים הראשונות של הלימודים הגבוהים לומדים בדרך-כלל את תורת הקבוצות הנאיבית.
הנושא תורת הקבוצות אהוב על התלמידים ועל המורים, והרבה מתוך המושגים הנלמדים הם מושגים קלים לקליטה ואינטואיטיביים, היות שאפשר לייצג את הקבוצות ואת הקשרים ביניהן בצורה פשוטה, בעזרת עיגולים או אליפסות, הנחתכים, הנכללים אחד בתוך השני, או הזרים אחד מהשני.
לעומת זאת, הסימנים שמקובלים לשימוש בתורת הקבוצות הם סימנים שדורשים לימוד, ולכן כדאי להתעכב עליהם.
בשלב זה של הלימודים ובגיל זה היתרון הגדול של תורת הקבוצות הוא בזה שהיא מאפשרת ייצוג של קשרים לוגיים בין קבוצות, ובכך היא מהווה בסיס לענף חשוב במתמטיקה – לוגיקה מתמטית. תורת הקבוצות היא גם כלי להבנת הסתברות. מאוחר יותר היא תאפשר ייצוג של קשרים בין משפטים .
בפרק "תורות הקבוצות" התלמידים נחשפים למושגים בסיסיים של הנושא: קבוצה ואיבריה, קבוצה ריקה וקבוצה משלימה, איחוד וחיתוך של קבוצות. התלמידים לומדים סימונים ייחודיים של המקצוע שיכולים לסייע להם בלימודי המשך. יש חשיבות רבה לחשיפת התלמידים לייצוגים רבים במהלך לימוד הנושא. אחד הייצוגים המרכזיים הוא דיאגרמת וון. בפרק ישנה התייחסות לנושאים שנלמדים בתכנית הלימודים - גאומטריה, אלגברה, תורת המספרים ועוד.

שיעור ראשון: **מונחים והגדרות**, עמ' 20 (שיעור אחד)

מושגים מרכזיים:

קבוצה – אוסף של חפצים או של צורות.

איברים של קבוצה – עצמים ששייכים לקבוצה.

תת-קבוצה – קבוצה שמכילה רק איברים של קבוצה גדולה, אך לא את כולם.

הקבוצה הריקה – קבוצה שאין בה איברים.

סימונים מקובלים:

- **שייך/לא שייך** לקבוצה - ($\in$, $\notin$).
- **מוכל** - ($\subset$, $\supset$).
- **קבוצה ריקה** - $\varnothing$.
- **קבוצה**: 1) כתיבת רשימה של איברים בתוך צומדיים $A = \{.....\}$;
  2) ציון תכונה משותפת;
  3) כתיבה של איבר כללי ותנאי $N = \{n \,/\, n > 0,\ \text{שלם } n\}$;
  4) כתיבת האיברים הראשונים ולאחריהם "..." להמחשת ההמשכיות והאין-סופיות של אברי הקבוצה $A = \{1, 2, 3, ...\}$.

המלצות להוראה:
כדאי להתחיל את הקניית הפרק מדוגמה מעניינת שתמחיש לתלמידים את המושגים שהם ילמדו בהמשך. הדוגמה לא חייבת להיות מתמטית, אלא קשורה לחיי היום-יום או לתרבות הכללית.
דוגמאות:
- ✓ במשפחת מרום שני הורים וחמישה ילדים: דנה, דני, יובל, נועה ושרון. נגדיר בתור קבוצה את כל הילדים במשפחת שרון.
- ✓ בניית קבוצות לפי שם פרטי של התלמידים.
- ✓ בניית קבוצות לפי משפחות של חיות, של פרחים, של פירות או של ירקות. זוהי הזדמנות טובה ללמוד על תחומים אחרים.
- ✓ בניית קבוצות לפי אנשי מדע שחיו באותה המאה. זוהי הזדמנות טובה להדגים חיתוך של קבוצות: אנשים שחיו בשתי מאות עוקבות.
- ✓ בניית קבוצות לפי המקצועות (או הזמרים או הבילויים) המועדפים על התלמידים. (התלמידים יכולים לבחור יותר ממקצוע אחד)

תורת הקבוצות

באמצעות הדוגמאות אפשר להציג את הסימונים המקובלים, ואת צורות הרישום השונות של קבוצות וגם את הסכמי הכתיבה שמופיעים בעמ' 21.

בפרק מופיעים מס' נושאים לאורך הפרקים: הסכמי כתיבה, תת-קבוצה, קבוצה ריקה. ישנן מספר צורות עבודה אפשריות עם המושגים. למשל:

א) הסברת המושגים בצורה הדרגתית בהתאם לסדר הופעתם בפרק. בכל פעם עוצרים את העבודה, מתכנסים לדיון כיתתי, מבהירים את המושג וממשיכים בעבודה עצמאית.

ב) מסבירים את כל המושגים בהתחלה ונותנים לתלמידים לפתור את כל התרגילים באופן עצמאי (ביחידים או בקבוצות). בודקים תרגילים נבחרים במליאה.

ג) נותנים לתלמידים לנסות להתמודד עם המושגים לבד, כולל עם פתרון שאלות שקשורות למושגים. בודקים במליאה תרגילים נבחרים.

אם בוחרים בצורת עבודה א', לאחר ההצגה של הנושא כדאי ללמד את המושגים ואת הדוגמאות שבשיעור (עמ' 20 – 21). כדאי להדגיש את הסימונים של קבוצות המספרים השונות N, Z וכד'. חשוב מאוד להדגיש את הסכמי הכתיבה שמופיעים בעמ' 21.

את תרגילים 1 - 4 שבעמ' 21, 22 כדאי לתת לעבודה עצמאית (ביחידים או בקבוצות). חשוב לבדוק שכולם הבינו את נוסח השאלות.

בעמ' 22 מופיע הנושא תת-קבוצה ויחסי הכלה. כדאי לתת כדוגמה קצרה קבוצה מתוך אלו שאיתן עבדו התלמידים. תרגילים 5 – 8 מיועדים לעבודה עצמית.

בעמ' 23 מובא המושג קבוצה ריקה. ניתן לתת לתלמידים להתמודד עם המושג לבד, מכיוון שזהו מושג אינטואיטיבי. יש לבדוק הבנה במליאה, לתת לתלמידים לפתור את תרגילים 9 – 10 באופן עצמאי, ולבדוק תרגילים נבחרים במליאה.

בעמ' 24 מופיע פרדוקס מעניין שקשור להגדרה של קבוצה. כדאי לקרוא את הסיפור ביחד או בעבודה עצמית ולדון בפרדוקס שבסיפור. רצוי לדון בדרכים כיצד ניתן לפתור את הפרדוקס וכיצד ניתן להגדיר קבוצה בצורה חד-משמעית.

<u>תשובות והערות לתרגילים:</u>

(1) א) מספר המספרים הזוגיים הוא אין-סופי. ב) $T = \{n | n = 2m-1, m > 2, m \in N\}$.

(2) יש 6 אפשרויות שונות לסדר את האותיות בקבוצה. כל 6 האפשרויות מגדירות אותה קבוצה.

$R= \{c,b,a\}$ $R= \{c,a,b\}$ $R= \{b,a,c\}$ $R= \{b,c,a\}$ $R= \{a,c,b\}$ $R= \{a,b,c\}$

(3) 8 תווים.

(4) התנאי לכך ש"אורך המילה" יהיה שווה למספר האותיות בקבוצת האותיות, הוא שכל האותיות במילה תהיינה שונות זו מזו.

(5) א) A={צ,נ,מ,י,ו}. ב) לדוגמה: ציון, מצוי, צנום. ג) האותיות שונות, ולכן הקבוצות שונות. ד) לדוגמה: צו.

(7) התשובה הנכונה היא א'.

(8) א) לדוגמה: צמחים. ב) לדוגמה: {מצולעים} ⊂ {מרובעים} ⊂ {מקבילית} ⊂ {ריבועים}.

(9) בקבוצה הריקה אין איברים, אין אפשרויות שונות ל"אין איברים".

(10) אין איברים השייכים לשתי הקבוצות. ניתן לראות בסרטוט שאין איברים משותפים.

<u>שיעור שני</u>: **חיתוך ואיחוד**, עמ' 25 (שיעור אחד – איחוד קבוצות, שיעור – חיתוך קבוצות)

<u>מושגים מרכזיים:</u>

דיאגרמות וון.

עולם הדיון – קבוצה שכוללת את כל האיברים הרלוונטים לנושא.

פעולת חיתוך.

פעולת איחוד.

תורת הקבוצות

סימונים מקובלים:

- **עולם הדיון** - (I)
- **חיתוך** - ($\cap$)
- **איחוד** - ($\cup$)

המלצות להוראה:

מומלץ ללמד את הנושא בשני שיעורים – בשיעור אחד ללמד את פעולת החיתוך בין קבוצות ובשיעור שני ללמד איחוד של קבוצות.

את השיעור הראשון כדאי להתחיל מהסבר על דיאגרמות וון (עמ' 25). ייתכן שחלק מתלמידים הכירו את צורת הרישום מלימודיהם בבית-הספר יסודי. כדאי להסביר את האפשרויות השונות באמצעות דוגמאות מילוליות פשוטות מחיי היום-יום (למשל, ניתן להדגים קבוצות זרות על-ידי קבוצת המבוגרים וקבוצת הילדים שיצאו לטיול - אין איברים משותפים בין הקבוצות; ניתן להדגים חיתוך ואיחוד על-ידי דוגמה של מקצועות / זמרים / ספורט.) אחרי שהתלמידים הבינו את משמעות הייצוג באמצעות הדיאגרמות, ניתן לבקש מהם שיחברו סיפורים מתאימים למצבים השונים. את המושג "עולם הדיון" מומלץ להסביר על-ידי מספר רב של דוגמאות, מכיוון שהמושג לא אינטואיטיבי ולא קל לתפיסה.

לדוגמה, כאשר "עולם הדיון" הוא המספרים הטבעיים, אפשר לדבר על כפולות ועל מחלקים, מה שלא נכון כאשר "עולם הדיון" הוא המספרים הממשיים.

עמ' 26 – מגדירים את פעולת החיתוך ודנים בתרגיל 1. את תרגילים 2 – 10 ניתן לעשות בעבודה עצמית בהתחלה. כדאי להתעכב ולדון בתרגילים: 2, 4 (להדגים על ציר המספרים), 6 (תורת המספרים), 8 (קשר עם אלגברה, ערך מוחלט ופתרון משוואות), 9 (איחוד של יותר משתי קבוצות), 10 (תרגיל סיכום שדורש גם יצירתיות).

את השיעור השני כדאי להתחיל מהסבר וסימון של פעולת האיחוד (עמ' 29). נותנים את תרגילים 11 – 22 בהתחלה בתור עבודה עצמית. כדאי לבדוק ולדון בתרגילים הבאים: 13 (איחוד של קבוצות זרות), 15 (מדגיש הבדל בין איחוד לחיתוך, חזרה על צורת רישום הקבוצה), 17 (קשר עם גיאומטריה), 19 (תורת המספרים, שאריות של חלוקה בשלוש).

פעולת "חיתוך" יותר קלה לתפיסה מפעולת "איחוד". כדאי להסביר שוב ושוב שקבוצת האיחוד כוללת בתוכה גם את "קבוצת החיתוך" וגם איברים נוספים ששייכים לקבוצה אחת ולא שייכים לשנייה. כדאי להדגים את המושג באמצעות דוגמאות רבות שכוללות בעיות מילוליות ובאמצעות דיגראמות וון.

תשובות והערות לתרגילים:

(1) כן. בקבוצת החיתוך נמצאים האיברים המשותפים לשתי הקבוצות.

(2) ג) בקבוצת החיתוך נמצאים תלמידי הכיתה המנגנים בכלי מוזיקלי החובבים ספורט.

(3) קבוצת החיתוך היא קבוצת האנשים בתחנה המרכזית הלובשים מעיל גשם ואוחזים מטריה.

(4) אין מספרים הגדולים מ- 7 (קבוצה A) וגם קטנים מ- 3 (קבוצה B).

(5) א) כן. בקבוצת החיתוך נמצאות ציפורים שאינן מסוגלות לעוף מלידה, אבל מטיבות לשחות. לדוגמה: ברווז.
ב) כן. ציפורים המטיבות לשחות וגם מסוגלות לעוף. לדוגמה: שקנאי.

(6) א) לדוגמה: 2,4,6,8. ב) לדוגמה: 3,6,9,12. ג) קבוצת החיתוך מכילה איברים. לדוגמה: 6,12,18,24. התכונה המאפיינת את איברי קבוצת החיתוך שכולם זוגיים וגם כפולות של 3. כל האיברים הם כפולות של 6. ד) $A\cap B=\{n \mid n = 6m\}$.

(7) $P\cap Q = \{x \mid x > 39\}$. קבוצה Q מוכלת בקבוצה P .

(8) א) המספרים 2,3,4,5,6,7,8,9.

(9) התחום המתאים ל- $A\cap B\cap C$ הוא כל המספרים המקיימים $4 < x < 4.5$, $2.5 < x < 3$.

(10) א) האזור המשובץ בסרטוט. ב) אליפסה החותכת גם את K וגם את S. ג) אליפסה החותכת את K ולא חותכת את S. ד) אליפסה החותכת את S ולא חותכת את K. ה) אליפסה שלא חותכת לא את K ולא את S.

תורת הקבוצות

(14) א) תלמידי הכיתה המנגנים ו/או חובבי ספורט.

(15) א) $S \cup B = \{ n \mid 1 \le n \le 200 \}$. ב) $S \cap B = \{ n \mid 50 \le n \le 100 \}$.

(16) ד) $A \cap B$ - כל האותיות המשותפות לשם הפרטי ולשם המשפחה.
$A \cup B$ - כל האותיות המופיעות בשם הפרטי ובשם המשפחה.
$C \cap A$ - כל האותיות השם הפרטי.
$C \cap B$ - כל אותיות שם המשפחה.

(17) א) $E = B \cap D$. קבוצת המרובעים שיש להם 3 זוויות של $90°$. בקבוצה זו נמצאים המלבן והריבוע.
ב) $F = C \cap A$. קבוצת מרובעים שווי-צלעות שיש להם 2 זוויות של $90°$. בקבוצה זו נמצא הריבוע
ג) קבוצה C מוכלת בקבוצה D. $C \subset D$.
ד) $A \cap D$ - קבוצת המרובעים שווי-הצלעות שיש להם 3 זוויות של $90°$. בקבוצה זו נמצא הריבוע.
ה) $A \cap B$ - קבוצת המרובעים שווי-הצלעות. בקבוצה זו נמצאים המעוין והריבוע.

(18) א) $A \cap C$ - קבוצת הבנות המציירות בכיתה.
ב) $A \cup B \cup C$ - קבוצת תלמידי הכיתה המציירים ו/או הבנים בכיתה שאינם מציירים ו/או בנות הכיתה. הקבוצה כוללת את כל תלמידי הכיתה.
ג) $A \cap B$ - קבוצה ריקה. אין תלמידים משותפים לציירים ולאלה שאינם יודעים לצייר.
ד) $(A \cap B) \cap C$ - קבוצה ריקה. כיוון שהקבוצה $A \cap B$ ריקה, אין לה איברים משותפים עם C.

(19) א) קבוצה E כוללת את קבוצת המספרים הטבעיים שהם מכפלות של 3.
ב) הקבוצה $R \cup D$ כוללת את המספרים הטבעיים שאינם מכפלות של 3.

(20) בקבוצה C איבר אחד – 0.

שיעור שלישי: **הקבוצה המשלימה**, עמ' 33 (שיעור אחד)

מושגים מרכזיים: **קבוצה משלימה.**

סימונים מקובלים:

$\overline{A}$ קבוצה משלימה לקבוצה A.

המלצות להוראה:

כדאי להתחיל את השיעור מדוגמה פשוטה מחיי היום-יום (למשל, קבוצת הדיון – תלמידי הכיתה, A – קבוצת הילדים שעוסקים בספורט. איך ניתן לתאר את כל הילדים ששייכים לקבוצת הדיון ולא שייכים לקבוצה A?). כדאי ללוות את ההסבר המילולי על-ידי דיאגרמת וון. כדאי לראות יחד את הדוגמאות בעמ' 33 ולדון בתרגילים מס' 1 ו-2. את תרגילים 3 – 8 יש לתת לעבודה עצמית בהתחלה. כדאי להתעכב ולבדוק את התרגילים הבאים: 4 (מדגיש דקויות ומקרים מיוחדים של קבוצה משלימה); 8 – שאלת סיכום (תורת המספרים).
על מנת להקל את ההבנה של קבוצה משלימה, כדאי להשתמש בצבעים שונים או בצורות קווקוו שונות. קודם לצבוע קבוצה בצבע אחד ואז את הקבוצה המשלימה בצבע אחר.

תשובות והערות לתרגילים:

(1) כן.

(2) קבוצה ריקה. אין איברים משותפים לשתי הקבוצות. בקבוצה המשלימה נמצאים כל האיברים שלא שייכים לקבוצה A, ולכן אין איברים משותפים עם האיברים שכן שייכים לקבוצה A.

(3) אין חשיבות לסדר האיברים בתשובות
נתון: I = { ✋, a, □, 7, *, b, ט, 10 };
Q = {*, b, □, 7, ט } ; P = { ✋, a, □, 7 }

תורת הקבוצות

$\overline{P} = \{ * , b,$ ט $, 10\}$ $\qquad$ $\overline{Q} = \{$ ✋ $, a, 10 \}$

$P \cap Q = \{\square, 7\}$ $\qquad$ $P \cup Q = \{$ ✋ $, a, b, *, 7, \square,$ ט $\}$

$\overline{P \cup Q} = \{10\}$ $\qquad$ $\overline{P \cap Q} = \{$ ✋ $, a, *, b,$ ט $, 10\}$

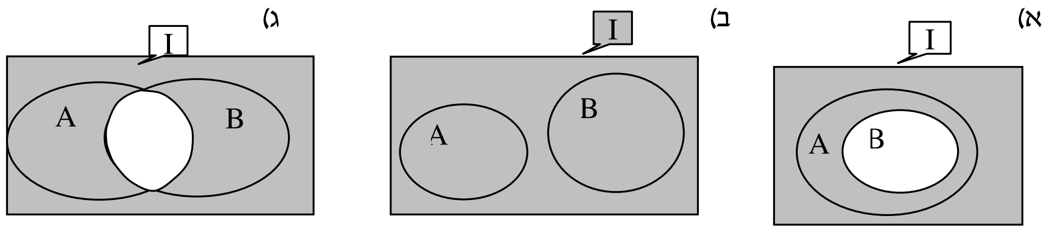
$\overline{P} \cup Q = \{ *, b,$ ט $, 10,$ ✋ $, a\}$ $\qquad$ $P \cup \overline{Q} = \{$ ✋ $, a, \square, 7, 10\}$

(4) באפור הקבוצה המשלימה ל- $A \cap B$.

א) $A \cap B = B$. לכן הקבוצה המשלימה היא $\overline{B}$.

ב) $A \cap B = \varnothing$. לכן הקבוצה המשלימה היא I.

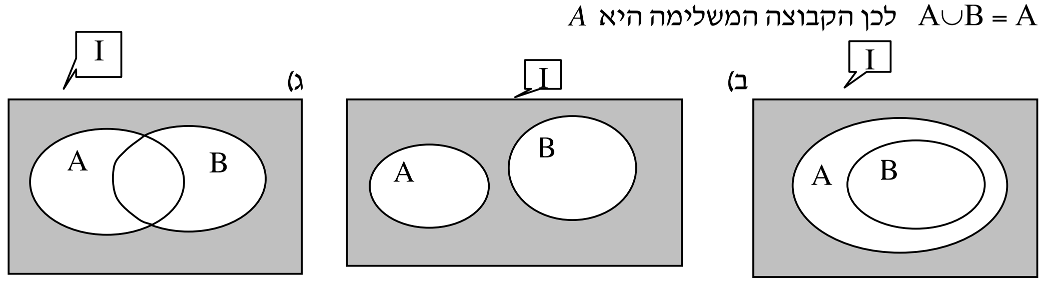
א) ב) ג)



(5) באפור הקבוצה המשלימה $A \cup B$.

א) $A \cup B = A$ לכן הקבוצה המשלימה היא $\overline{A}$

א) ב) ג)



(6) $\overline{D} = \{x \mid x < 10$, שלם $x\}$. $\qquad \overline{D} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

(7) א) המצולעים הצבועים. ב) כל המצולעים ו/או כל הצורות הצבועות.
ג) כל הצורות שאינן מצולעים צבועים. ד) כל הצורות שאינן מצולעים ו/או לא צבועות.
ה) מצולעים שאינם משולשים, כלומר מלבנים ומחומשים. ו) מצולעים ו/או צורות גדולות.
ז) הצורות שאינן מצולעים גדולים. כלומר מצולעים קטנים וכן העיגולים והסהרונים.
ח) מצולעים קטנים. ט) $\overline{D} \cap \overline{B}$. י) $B \cap \overline{A}$.

(8) א) בקבוצה A נמצאים המספרים 4,18, שהם מספרים זוגיים. בקבוצה B נמצא המספר 18 הוא אמנם גם כפולה של 3, אבל המספר 15 שאף הוא כפולה של 3 נמצא מחוץ לקבוצה B, לכן התכונה המתאימה היא כפולות של 6 . תכונה זו מאפיינת את המספר 18 ולא מתאימה למספרים האחרים, 4 ו-15 המופיעים בדיאגרמה.
ב)

דיאגרמה	A מספר תכונה	B מספר תכונה
א	1 מספרים זוגיים	4 כפולות של 9
ב	3 כפולות של5	8 מספרים >10
ג	3 כפולות של 5	2 מספרים אי- זוגיים
ד	2 מספרים אי- זוגיים	4 כפולות של 9
ה	5 כפולות של3	10 מספרים ראשוניים
ו	8 מספרים >10	9 מספרים > 10
ז	5 כפולות של3	6 המחלקים של 24