י. הסתברות

רקע

בפרק זה התלמידים נחשפים לסוג חדש של חשיבה: חשיבה הסתברותית. חשיבה זו מתאפיינת ביכולת לדמיין מצבים עתידיים או דמיוניים, ולבצע חישובים המבוססים על ניתוח מצבים אלה בעזרת נוסחאות ידועות או בעזרת פתירה בלתי פורמלית המתבססת על הנוסחאות.
חיי היום-יום מורכבים מאירועים המאופיינים על-ידי מקריות ואי-ודאות. ניתן למיין אירועים אלו לשני סוגים:

- **תופעות** שהן אירוע לא מתוכנן, כגון: רעידת אדמה, ירידת שלג.
- **ניסויים**, שהם פעולות מבוקרות הניתנות לשחזור של תהליך כלשהו, כדי לבדוק את תוצאותיו האפשריות, כגון: זריקת קובייה, הטלת מטבע, השפעת תרופה על מחלה כלשהי.

תוצאה של תופעה או ניסוי יכולה להיות אחת מתוך מספר תוצאות אפשריות, ובדרך כלל אין לדעת בוודאות מה תהיה התוצאה בטרם תסתיים התופעה או יסתיים הניסוי.
הכלי המתמטי אשר בעזרתו מטפלים בתוצאות של תופעה או ניסוי נקרא *תורת ההסתברות*. תורה זו מספקת את המודלים המתמטיים להיבטים של *אי-ודאות* בבעיות מעשיות רבות, כגון: סקרי דעת קהל, הטלת מטבע או קובייה, רעידות אדמה, תאונות, לידות, קלקולים במערכת טכנולוגית מסוימת, התרבות מין מסוים של בעל חיים, התפשטות מחלה וכדומה. בעזרת תורת ההסתברות מנסחים בצורה מתמטית שאלות שהן לכאורה לא מתמטיות, כמו: "מה הסיכוי לרעידת אדמה בארץ בשנת 2025?" או "מה הסיכוי לקבלת התוצאה 6 בזריקת קובייה?". המטרה היא, כמובן, לא רק לשאול, אלא גם לתת תשובות לשאלות אלו.
בהסתברות חוקרים את סיכוייהן של תופעות עתידיות על סמך:

א) עריכת סקר או ניסוי, או צפייה בתופעה.
ב) איסוף נתונים .
ג) ניתוח התוצאות וחישובים תיאורטיים.

חשוב להבדיל בין התוצאות במציאות לבין החישובים התיאורטיים.
כאשר מדובר במספר רב של תוצאות במציאות, ההסתברות של התופעה מתקרבת לחישוב התיאורטי.
אולם, כאשר מספר הניסויים הוא קטן, עלול להיות פער משמעותי בין המציאות לבין ההסתברות התיאורטית.
במבוא להסתברות חוקרים רק תופעות וניסויים המאופיינים בכך שתוצאותיהן אינן קשורות ביניהן ושיש להן אותו סיכוי להופיע.
הקשיים בהסתברות נובעים בעיקר מהאופי המיוחד של הנושא ופחות מהדידקטיקה. להלן כמה מהקשיים:

א) הנושא "הסתברות" מצריך שימוש באוצר מילים מיוחד המוכר מצד אחד בחיי יום-יום, אך מצד שני הוא בעל משמעות ייחודית המותאמת לנושא. דוגמאות למילים כאלה הן: מאורע, אפשרות, ודאות, אי-ודאות, אפשרי, בלתי אפשרי, סבירות גבוהה, סבירות נמוכה, ניסוי, תופעה, סיכוי, תוצאה, מרחב מדגם, שכיחות יחסית.
ב) בעוד שאפשר לקבוע אם חישובים באריתמטיקה או באלגברה נכונים או לא נכונים, החישובים בהסתברות קשורים למושגים *אי-ודאות* ו*סיכוי* הקשים לתפיסה גם למבוגרים.
ג) מדידת הסיכויים בהסתברות היא מדידה תיאורטית. הבנת הפער בין החישובים התיאורטיים לבין המציאות או האינטואיציה מאפיינת את התובנה ההסתברותית.
ד) מדידת הסיכויים בהסתברות מבוססת על אוריינות, כלומר על הבנה נכונה של משמעות השאלה, על יכולת קריאת נתונים מתוך דיאגרמה וכן על ידע רחב בשברים פשוטים, מספרים עשרוניים ובאחוזים, על משמעותם ויכולת השימוש בהם.

מדוע ללמד פרק זה?

נימוקים מתמטיים

- חשיבה הסתברותית היא אחת מצורות החשיבה המתמטית המקנה יתרון בחיי היום-יום לרוכש אותה. תורת ההסתברות היא בין היתר הבסיס התיאורטי של מדע הסטטיסטיקה ומשתמשים בה במדעי הטבע, במדעי החברה ובחיי היום-יום.
- הנושא "הסתברות" מהווה גורם המאחד נושאים שונים בתוך המתמטיקה: חישובים המפעילים אריתמטיקה ואלגברה, חקר נתונים, וכן נושאים בגיאומטריה.

נימוקים דידקטיים

- תורת ההסתברות מאפשרת לתלמידים לפתור בעיות בדרך של הפעלת היגיון ולא רק בדרך טכנית.
- פרק זה דורש אוריינות ברמה טובה, ומדגים הן למורה והן לתלמידים את הצורך בהבנה מילולית נכונה של המשימות שלפניהם.

נימוקים פדגוגיים

- השיעורים בהסתברות כוללים הרבה ניסויים מעשיים היוצרים עניין ושוברים את שגרת הלימודים.
- בהיות השאלות בהסתברות קשורות לחיי היום-יום הן הופכות את הנושא למרתק ואפילו למשעשע, דבר היוצר מוטיבציה לפתור אותן.
- ניסויים בהסתברות מורכבים מעשייה, חקירה וחשיבה ייחודיות ועצמאיות, היוצרות חוויה לימודית.

מושגים והגדרות פורמליות הקשורים להסתברות

א. **תופעה** – פעולה המתרחשת ללא תנאים מוקדמים הנערכים במתכוון.

ב. **ניסוי** – פעולה מבוקרת, הנותנת תוצאות שונות. כגון מעשה, או תצפית.

ג. **משתנה** – המאפיין של התופעה שנחקר, כגון: צבע עיניים, מספר תלמידים בכיתות.

ד. **ערכים של המשתנה** – כל הערכים האפשריים של המשתנה. לדוגמה: כחול, ירוק... לצבע העיניים.

ה. **שכיחות** של ערך – מספר הפעמים שהערך מתרחש.

ו. **מאורע** – מונח מתמטי השקול למונח "אירוע". במסגרת של ניסוי, מאורע יכול להיות קבלת אחד או יותר מהערכים של המשתנה.

ז. **מאורע ודאי** – מאורע שמתרחש תמיד.
הסבר: אם אפשר להבטיח מראש שמאורע מסוים יקרה, זהו "מאורע ודאי".

ח. **מאורע בלתי אפשרי** – מאורע שאף פעם לא יתרחש.
הסבר: אם אפשר להבטיח מראש שמאורע מסוים לא יקרה זהו "מאורע בלתי אפשרי".

ט. **מאורע אפשרי** – מאורע שיכול להתרחש, אולם אין ביטחון מלא שיתרחש.
הערה: יש לשים לב להבדל בין "מאורע ודאי" לבין "מאורע אפשרי", ולהבין את המשמעות הזהה של "מאורע לא ודאי" ו"מאורע אפשרי".

י. את **ההסתברות** להתרחשותו של "מאורע ודאי" אנו מגדירים כסיכוי של 100% = 1. ואילו את **ההסתברות** להתרחשותו של "מאורע בלתי אפשרי" אנו מגדירים כסיכוי של 0% = 0. לפיכך נגדיר את **ההסתברות** להתרחשותו של "מאורע אפשרי" כסיכוי הנע בין 0% ל – 100%, או בין 0 ל – 1.

יא. **שכיחות המאורע** – גודל הקבוצה החלקית של התוצאות המייצגות את המאורע.

יב. **השכיחות היחסית של המאורע** – ההסתברות של מאורע אפשרי. המנה המתקבלת מחלוקת שכיחות המאורע במספר סך התוצאות האפשריות של מרחב המדגם.
הערה: אפשר לחשב הסתברות של מאורע רק אם לכל התוצאות של המאורע יש סיכוי שווה להתקיים.

יג. **מאורע משלים** – מאורע הנגדי למאורע מסוים. כאשר סכום הסיכויים של שניהם שווה ל- 1.
אם ההסתברות של מאורע כלשהו היא P, אז ההסתברות של המאורע המשלים היא 1 – P.

יד. **מאורעות זרים** – מאורעות שאינם יכולים להתרחש בו זמנית.
מאורע ומאורע משלים הם מאורעות זרים.

טו. **מאורע פשוט** או **מאורע יסודי** – מאורע חד-שלבי של ניסוי אחד המורכב מתוצאה אחת.

טז. **מאורעות דו-שלביים** – מאורעות הכוללים שתי תוצאות בלתי תלויות של שני ניסויים.
בחישוב ההסתברות של מאורע דו-שלבי מחפשים את הסיכוי להתרחשות שני המאורעות בו זמנית.

יז. **טבלה דו-ממדית** – טבלה המתארת את השילוב של תוצאות שני ניסויים הנעשים בו זמנית.

יח. **מציאות מול חישוב תיאורטי** – השכיחות היחסית של מאורע מסוים בניסוי מחושבת לפי תוצאות הניסוי בפועל, לעומת זאת ההסתברות של מאורע היא חישוב תיאורטי לפי תנאי הניסוי. תוצאות החישוב התיאורטי בדרך כלל מתאימות למציאות כאשר מדובר במספר רב של תוצאות, אולם לעתים יתברר כי המציאות בפועל איננה תואמת את החישוב התיאורטי.

מטרות

התלמידים ידעו:

א. מהו מקצוע ההסתברות ומהם המושגים המיוחדים לו;
ב. לזהות "מאורע ודאי", "מאורע בלתי אפשרי" ו"מאורע אפשרי" ולהבדיל ביניהם;
ג. שההסתברות של "מאורע ודאי" היא 100% או 1.
שההסתברות של "מאורע בלתי אפשרי" היא 0% או 0.
שההסתברות של "מאורע אפשרי" נעה בין בין 0 ל- 1 או בין 0% ל- 100%;
ד. לזהות את שכיחותו היחסית של מאורע בעזרת פעילות גילוי;
ה. לחשב הסתברות של מאורעות חד-שלביים;
ו. שהסתברות של מאורע היא חישוב תיאורטי המבוסס על מספר רב מאד של ניסויים;
ז. שבמציאות ניתן לקבל תוצאה שונה מהסתברות צפויה;
ח. להגדיר מאורע משלים ולחשב אותו;
ט. להגדיר מאורעות זרים ולחשב את ההסתברות שלהם;
י. לחשב הסתברות של מאורעות דו-שלביים בעזרת טבלה דו-מימדית.

פעילויות גילוי

כל חלק של הפרק הסתברות נפתח בשתי שאלות גילוי. אולם ניתן להוסיף עליהן עוד בהתאם לנדרש.
לצורך חלק מפעילות הגילוי יש להיעזר באביזרים ואמצעי המחשה כגון:
עיגולים וריבועים צבעוניים מנייר או מחומר פלסטי, קוביות משחק, סביבונים, מטבעות, חבילת כרטיסי מספרים, גולות צבעוניות. כמו כן מומלץ להשתמש בלוח מחיק לבניית טבלאות.

א. ריבועים בשקית - ודאי, בלתי אפשרי, אפשרי.
מכניסים לשקית לא שקופה 3 ריבועים אדומים ו- 4 ריבועים צהובים באותו הגודל.
שואלים את התלמידים: "האם אפשר להוציא מהשקית ריבוע אדום?", "האם אפשר להוציא מהשקית ריבוע צהוב?". מבקשים מתלמידים שונים להוציא ריבוע ולהכניס בחזרה כדי להראות שאפשר להוציא הן ריבוע אדום והן ריבוע צהוב.
עתה שואלים: "האם אפשר להוציא מהשקית ריבוע כחול?" ומבקשים לנמק את התשובה.

ב. פעילות ללא אביזרים - ודאי, בלתי אפשרי, אפשרי.
שואלים את התלמידים: "אם נזרוק קובייה מה בטוח יקרה?" התשובה הצפויה – היא תיפול.
שואלים שוב: "ומה בטוח לא יקרה?". תשובות צפויות – היא תישאר באויר או תיפול על המספר 7. ואז שואלים: "ומה אולי יקרה?" התשובה הצפויה – היא תיפול על המספר 6 (או על כל מספר אחר בין 1 ל- 6)

ג. כרטיסי מספרים - ודאי, בלתי אפשרי, אפשרי.
מכינים חבילת כרטיסי מספרים. שמופיעים בה המספרים מ- 1 עד 10.
שואלים את התלמידים: "האם אפשר להוציא מהחבילה מספר קטן מ- 10? מספר קטן מ- 5? מספר קטן מ- 1? מספר גדול מ- 10? מספר גדול מ- 5? מספר זוגי? מספר אי-זוגי?". מבקשים מתלמידים שונים להוציא מספר מהשקית ולהחזיר, וכך מראים מה ניתן להוציא ומנמקים מה לא ניתן להוציא.

ד. קוביית משחק - חישוב ההסתברות.
כל תלמיד מקבל קוביית משחק (אפשר גם לתת קובייה לכל קבוצת תלמידים) שואלים:
"האם ניתן בהטלת קוביה לקבל מספר זוגי? מה הסיכוי לכך?",
"האם ניתן בהטלת הקובייה לקבל מספר אי-זוגי? מה הסיכוי לכך?".
כולם מתבקשים להטיל את הקובייה פעם אחת או יותר (בהתאם למספר הקוביות הנזרקות) רושמים את מספר הפעמים שהתקבל מספר אי-זוגי ואת מספר הפעמים שהתקבל מספר זוגי.
לאחר שהצטברו 100 הטלות, מחשבים כמה מתוכן נתנו תוצאה של מספר זוגי וכמה מתוכן נתנו מספר אי-זוגי, ובודקים איזה חלק (או אחוז) הן מהוות מכלל 100 ההטלות.
קרוב לודאי שהתוצאה תהיה קרובה ל- $\frac{1}{2}$.

ה. קוביית משחק - חישוב מול מציאות.
נותנים לתלמידים להטיל קוביות משחק כמו בפעילות ד', אולם הפעם מספר ההטלות הכללי לא יעלה על 10. בודקים האם גם הפעם כל אחת מההסתברויות היא $\frac{1}{2}$.
בדרך כלל, במספר הטלות מועט, לא תמיד מקבלים את היחס התיאורטי, כי יחס זה מבוסס על סמך מספר רב של תוצאות ניסוי ולא על מספר מועט של תוצאות.

ו. ריבועים במעטפות - השוואת סיכויים.
מניחים לפני התלמידים או לפני קבוצת תלמידים חמש מעטפות.
במעטפה הראשונה 3 ריבועים אדומים ושני ריבועים לבנים.
במעטפה השנייה 3 ריבועים אדומים ו- 4 ריבועים לבנים.
במעטפה השלישית 2 ריבועים אדומים ו- 3 ריבועים לבנים.
במעטפה הרביעית 6 ריבועים אדומים ו- 8 ריבועים לבנים.
במעטפה החמישית 4 ריבועים אדומים ו- 6 ריבועים לבנים
(ניתן לצייר על הלוח את תוכן המעטפות במקום לחלק אותן לתלמידים.)
שואלים את התלמידים: "מאיזו מעטפה יש סיכוי גדול יותר להוציא באקראי ריבוע אדום?"
דנים בדרכי ההשוואה בין השקיות, עד שמגיעים למסקנה שמה שקובע את הסיכוי הוא לא <u>מספר</u> הריבועים האדומים אלא <u>היחס</u> בינם לבין כלל הריבועים בשקית.

ז. גולות צבעוניות - השוואת סיכויים.
מכניסים לתוך שקית 3 גולות ירוקות, 5 גולות צהובות ו- 2 גולות כחולות.
שואלים את התלמידים: "איזה חלק מכל הגולות מהוות הגולות הירוקות? הצהובות? הכחולות?". שואלים: "לאיזה צבע יש סיכוי גדול יותר להיבחר באקראי? מדוע?".
מבקשים מאחד התלמידים להוציא גולה אחת. חוזרים על הפעולה מספר פעמים עם תלמידים שונים ובודקים את תוצאות הבחירה.
חשוב לזכור: מספר ניסויים קטן עלול לתת תוצאות שונות מהחישוב התיאורטי.

ח. כרטיסי מספרים - השוואת סיכויים.
מכניסים לשקחת פתקאות עליהן רשומים המספרים מ- 1 עד 30.
שואלים: "לאיזה מקרה יש סיכוי גדול יותר, להוציא מספר חד-ספרתי או מספר דו-ספרתי ולמה?"
מבקשים מכל ילד להוציא מספר אחד. כל התלמידים שקיבלו מספר חד-ספרתי מתבקשים להצביע.
מחשבים מהו היחס בין כמות המספרים החד-ספרתיים לכמות המספרים הדו-ספרתיים.
מחשבים מהו היחס בין המספרים החד-ספרתיים לבין כלל המספרים.
מחשבים מהו היחס בין המספרים הדו-ספרתיים לבין כלל המספרים.

השיעור בספר הלימוד

מגלים ולומדים

א. <u>מה בין ודאי, אפשרי ובלתי אפשרי?</u>, עמ' 51

<u>**מגלים**</u>
בשיעור זה התלמידים נחשפים לעובדה שתחזית מזג האוויר היא תופעה אפשרית, אולם לא ודאית. כך גם תוצאה של הטלת קובייה. אוצר המילים הרלוונטי לנושא: חיזוי, תצפית, סיכוי, מאורע, מאורע ודאי, מאורע אפשרי,מאורע בלתי אפשרי, מאורע לא ודאי, ניסוי ותוצאה.

<u>**לומדים**</u>
המילה תחזית מוכרת לתלמידים מחיי היום-יום בקשר למזג האוויר. אפשר לשוחח עם התלמידים על משמעות המילה "תחזית" ועל העובדה שלעתים תחזית מזג האוויר איננה מדויקת. החזאים יכולים לחזות שירד שלג אולם לבסוף לא יורד שלג. כדאי לדון עם התלמידים בזמן הנקשר ל"תחזית" - זמן עתיד. תחזית היא מאורע שעדיין לא התרחשו ואנו חוזים אותה, כלומר משערים אם היא תתקיים או לא.

<u>**מתרגלים**</u>
בתרגול מופיעות שאלות שונות הדנות במאורעות ודאיים, במאורעות בלתי אפשריים ובמאורעות אפשריים.

1. שאלות הקשורות לחיי היום-יום.
א) אפשרי; ב) בלתי אפשרי; ג) אפשרי; ד) ודאי; ה) אפשרי; ו) ודאי; ז) בלתי אפשרי ח) ודאי

3. שאלות הקשורות להטלה של קובייה הוגנת. הסיכוי לקבל מספר מ- 1 עד 6 הוא 1/6.
א) 100%; ב) בין 0% ל- 100%; ג) 0%; ד) בין 0% ל- 100%; ה) בין 0% ל- 100%

4. שאלה זו מהווה הזדמנות לחזור על כמה עובדות יסוד.
א) בלתי אפשרי ; ב) אפשרי ; ג) אפשרי ; ד) ודאי ; ה) אפשרי ; ו) בלתי אפשרי

6. שאלות הקשורות לסיבוב סביבון. הסיכוי לקבל את האותיות "נ", "ג", "ה", "פ" הוא ¼.
א) בין 0% ל- 100% ; ב) בין 0% ל- 100% ; ג) 100% ; ד) 0%.

8. חלק מהשאלות מתייחסות לשני מאורעות שלא יכולים להתקיים בו-זמנית.
א) אפשרי ; ב) אפשרי ; ג) אפשרי ; ד) בלתי אפשרי ; ה) אפשרי ; ו) אפשרי ; ז) בלתי אפשרי

9. א) ודאי ; ב) בלתי אפשרי ; ג) אפשרי ; ד) אפשרי ; ה) אפשרי

10. א) בלתי אפשרי. יש רק 4 קלפים מכל צבע. ; ב) אפשרי. ; ג) ודאי. מכל צורה יש 5 קלפים, לכן כאשר מוציאים 6 קלפים, יש לפחות 2 צורות.

11. א) בלתי אפשרי. כיוון שכופלים שני מספרים, לתוצאה יש לפחות 2 גורמים, כך שהיא לא מספר ראשוני.
ב) אפשרי. 2 הוא המספר הראשוני היחיד שהוא זוגי. מכפלתו במספר ראשוני נוסף תיתן תוצאה זוגית. ג) ודאי ; ד) אפשרי

ב. <u>שכיחות יחסית</u>, עמ' 56

<u>מגלים</u>
בפרק זה התלמידים ניגשים להיבט הכמותי של ההסתברות. הם מודדים סיכויים של מאורעות נתונים.
דרך פעילויות הגילוי הם מתחילים לעשות זאת באופן אינטואיטיבי.
פעילויות הגילוי:

1. יש לזהות תחילה בטבלה את המשתנה הנבדק, שאת שכיחותו היחסית אנו מחפשים. התשובה היא 3/32.

2. א) 1/4 ; ב) לא. במציאות מתקבלת לעיתים תוצאה השונה מהחישוב התיאורטי ; ד) 1/4 ; ה) כן. הסיכוי נמוך, אבל אפשרי.

<u>לומדים</u>
בשיעור מובאת הגדרה כמותית של ההסתברות ונוסח חישובה.
הבנת העיקרון בעצמו אינה קשה, הקושי נמצא בניתוח השאלות ובפירושן.
לאחר הכרת המושגים, מומלץ להדגים את אופן החישוב בכמה מקרים שהוזכרו תוך כדי שימוש במושגים השונים.
<u>הערות</u>:

1. יש לציין לתלמידים כי בחישוב הסתברות יש לתת לעתים את התשובה באחוזים. לדוגמה: 12 בנים מתוך 25 ילדים הם 48% = 48/100 = 12/25
2. יש להתייחס לעובדה שלעתים במציאות נקבל תוצאה השונה מהחישוב התיאורטי.

<u>מתרגלים</u>
יש לשים לב לקריאה נכונה של הטבלאות והדיאגרמות.
כאשר הערכים של משתנה הם מספרים, תלמידים רבים מתבלבלים בין הערכים של המשתנה לבין השכיחות שלהם. לדוגמה, במשימה 17 הערכים של המשתנה הם 1 - 6 והשכיחות היא מספר המקרים שבהם מופיע המאורע המתבקש.

12. 3/10

15. שכיחות יחסית מתוארת על-ידי שבר: המונה הוא מספר האפשרויות שהמאורע מתקיים והוא בהכרח קטן מהמכנה שהוא מספר כל האפשרויות.

14. 6/10

15. ב) 30 ; ג) $\frac{8}{30}$; ד) $\frac{8}{30}$; ה) $\frac{1}{15}$

16. מרכיב משקפיים: 12/25, אינו מרכיב: 52% .(13/25 × 100=52)

17. ניתן לייצג את ההסתברות בכמה דרכים: כשבר פשוט, כמספר עשרוני ובאחוזים. בתרגיל זה מתרגלים את כל האפשרויות.

יתקבל המספר 4	1/6	0.1666	16.66%
יתקבל מספר המתחלק ב 3	2/6	0.333	33.3%
יתקבל מספר ראשוני	3/6	0.5	50%
יתקבל מספר פריק	2/6	0.333	33.33%

18. א) 6/13 ; ב) כן. הסיכוי התיאורטי 6/13 מתקבל במספר גדול של "הוצאות".
19. א) 1/4 ; ב) 1/2 ; ג) 1/4
20. א) כן. ניתן לקבל גם "לא" כתשובה, כיוון שתלמידים יכולים לטעון שיש ימים חריגים. ; ב) לא
21. א) 36 ; ב) 1. 0 2. 3/36 3. 12/36 4. 21/36 ; ג) לא. יש רק שלושה משולשים ששתיים מצלעותיהם שחורות.
22. א) 3/10 ; ב) 2/10 ; ג) 0 ; ד) 10/10=1
23. א) 5/40 ; ב) 12.5% ; ג) 25% ; ד) 62.5%
24. א) 2/5 ; ב) 1/5 ; ג) 2/5 ; ד) 1/5
25. א) 2/6 ; ב) 5/6 ; ג) 3/6 =50% ; ד) 4/6 ; ה) כן
26. ב) 102 ; ג) 42/102 ; ד) 24/102 ; ה) 36/102
27. א) 15/100 ; ב) 3/100 ; ג) 75/100 ; ד) 10/100 ; ה) 55/100
28. א) 45 ; ב) 1. 4/45 2. 20/45 3. 21/45

ג. <u>למי יש יותר סיכוי?</u>, עמ 61

<u>מגלים</u>
בשלב זה התלמידים מתמודדים עם השוואת סיכוייהם של מאורעות שונים.

<u>לומדים</u>
בשיעור חוזרים על הקשר בין אוצר המילים השיפוטי (ודאי, אפשרי ובלתי אפשרי) לבין תרגום משמעותו לאחוזים או לשברים.
הביטוי להסתברות של אירוע איננו המספר המציין את <u>שכיחותו בלבד</u>, אלא המספר המציין את <u>שכיחותו היחסית</u>. השכיחות מתארת את מספר ההופעות של מאורע, בלי התייחסות למספר הכולל של האפשרויות, בעוד שסיכוי מתייחס גם למספר הכולל של האפשרויות. לפיכך מה שקובע את הסיכוי הוא גודל השבר המתקבל כתוצאה מחישוב השכיחות היחסית.
לעיתים שכיחות של מאורעות זהה, אולם ההסתברות להתרחשותם שונה, ואילו לעתים שכיחות המאורעות שונה אולם סיכויים להתרחש שווים.
דוגמה: בכל אחד מהסקרים הבאים שואלים אנשים מהו סוג השמן המועדף עליהם. בודקים מהי ההסתברות שנבדק אקראי יעדיף שמן זית.
סקר א: שואלים 100 אנשים מהו סוג השמן המועדף עליהם. 25 מעדיפים שמן זית.
סקר ב: שואלים 200 אנשים מהו סוג השמן המועדף עליהם. 25 מעדיפים שמן זית.
סקר ג: שואלים 100 אנשים מהו סוג השמן המועדף עליהם. 40 מעדיפים שמן זית.
סקר ד: שואלים 200 אנשים מהו סוג השמן המועדף עליהם. 80 מעדיפים שמן זית.

הסקר	מספר הנשאלים	שכיחות המאורע "מעדיף שמן זית"	שכיחות יחסית (סיכוי/הסתברות)
א	100	25	0.25
ב	200	25	0.125
ג	100	40	0.4
ד	200	80	0.4

<u>מתרגלים</u>
29. א) נכון. לכל מספר סיכוי שווה.
ב) לא נכון. יש 2 מספרים קטנים מ- 3, ו- 3 מספרים גדולים מ- 7.
ג) לא נכון. יש 4 מספרים גדולים מ- 6, ו- 4 מספרים קטנים מ- 5.
ד) לא נכון. ; ה) נכון. ; ו) לא נכון.
30. א) סיכוי שווה. 1/4 ; ב) קופסה א'. הסיכוי 1/2. (קופסה ב' הסיכוי 7/16) ; ג) קופסה ב'. הסיכוי 1/8. (קופסה א' הסיכוי 1/2) ; ד) קופסה ב' . הסיכוי 1/4. (קופסה א' הסיכוי 1/6) ;
ה) קופסה א'. הסיכוי 1/4. (קופסה ב' הסיכוי 3/16).
31. א) 1/4 ; ב) כן. לשתי אותיות (נ,פ) יש אות סופית ולשתי אותיות (ג,ה) אין אות סופית.ג) אות מהמילה "פינה" - ההסתברות 3/4 (3 אותיות). במילה "גדי" רק אות אחת, לכן 1/4.
32. א) סיכוי שווה . 3 מספרים זוגיים ו- 3 אי-זוגיים ; ב) מספר המתחלק ב- 2. 3 מספרים מתחלקים ב- 2 ורק 2 מתחלקים ב- 3 ; ג) מספר קטן מ- 6 ; ד) סיכוי שווה.
34. נועם. החלק האפור מהווה 5/8 מהשטח, החלק הלבן מהווה רק 3/8 מהשטח.

35. א) במשחק ב׳ הסיכוי 30%. (במשחק א׳ הסיכוי רק 25%) ; ב) במשחק א׳. הסיכוי 5/12 שהם כ-42%. במשחק ב׳ הסיכוי רק 20%.
36. לא.
37. א) 180/450 ; ב) גבר

ד. <u>מאורע משלים</u>, עמ׳ 65

<u>מגלים</u>

בתוך כדי הדיון באשר להשוואת סיכויים התלמידים מתבקשים לגלות את החוקיות בחישוב מאורע משלים. התלמידים כבר פגשו סוג זה של שאלות בלי התייחסות מיוחדת לעובדה שהיה מדובר במאורעות
משלימים. הבנת החוקיות אינה קשה, אך הקושי העיקרי מונח בהגדרת אחד מהמאורעות בצורה שלילית (לא ״נ״). אפשר לחשב ההסתברות בדרך ישירה ובעזרת המאורע המשלים. החישוב בעזרת המאורע המשלים בדרך-כלל קצרה יותר. יש לשים לב איזה מאורע הוא המשלים!

1. ״נ״: תוצאה אחת מתוך ארבע. ״לא נ״: 3 תוצאות מתוך 4.
2. יש 2 מספרים קטנים מ- 3 ולכן 2/6, יש 3 מספרים גדולים מ- 3 ולכן 3/6.
3. איתיאל צודק. חישוב בעזרת המאורע המשלים.

<u>לומדים</u>

הגדרת *מאורע משלים* למאורע נתון מבוססת על העיקרון שלכל ערך של המשתנה רק אחד משני מצבים יכול להתקיים: או שהערך מופיע או שהערך לא מופיע (ואז מופיע אחד מהערכים אחרים) ואין אפשרות אחרת. הסביבון יכול ליפול על ״נ״ או ליפול על אות אחרת מ״נ״, ואין אפשרות אחרת. החץ יכול לפגוע במטרה או מחוץ למטרה, ואין אפשרות אחרת. עקרון זה אינו קשור לחישוב ההסתברות שתלוי בנסיבות.

שני מאורעות (המתייחסים לאותו ניסוי) משלימים זה את זה אם כאשר אחד מהם מתקיים, השני לא מתקיים ותמיד מתקיים אחד מהם.

דוגמה למאורעות משלימים זה את זה בזריקת קובייה: מאורע A הוא ״הקובייה נופלת על מספר זוגי״, מאורע B הוא ״הקובייה נופלת על מספר אי-זוגי״. בזריקת קובייה מתקיים בהכרח אחד משני המאורעות וכאשר אחד מהם מתקיים השני לא מתקיים.

דוגמה נגדית: מאורע C הוא ״הקובייה נופלת על מספר גדול מ- 4״, מאורע D הוא ״הקובייה נופלת על מספר קטן מ- 4״. כאשר אחד מהמאורעות C ו- D מתקיים השני לא מתקיים, אך **לא** מתקיים בהכרח אחד משני המאורעות (הקובייה יכולה ליפול על המספר 4).

<u>מתרגלים</u>

39. א) 3/32 ; ב) 29/32. מאורעות א׳ ו- ב׳ משלימים זה את זה. החישוב בעזרת המאורע המשלים קצר יותר.
41. א) 90/100 ; ב) 10/100 ; ג) 85/100 ; ד) 15/100. מאורעות א׳ ו- ב׳ משלימים זה את זה, וכן מאורעות ג׳ ו- ד׳.
42. כדאי להעביר את כל המספרים לאותו ייצוג (שבר פשוט או אחוזים). א)50% ; ב) 5% ; ג) 75% ; ד) 80% ; ה) 55% ; ו) 50% ; ז) 75% ח) 75% ט) 95% י) 5%. א׳-ו׳, ב׳-ט׳, ט׳-י׳ הם זוגות של מאורעות משלימים. ב׳ ו- י׳ הם מאורעות זהים.
43. א)50/80 ; ב) 24/80 ; ג) 6/80 ; ד) 30/80 ; ה) 56/80 ; ו) 74/80. א׳-ד׳, ב׳-ה׳, ג׳-ו׳ הם זוגות של מאורעות משלימים.
44. א) 12/36 ; ב) 12/36 ; ג) 24/36 ; ד) 3/36 ; ה) 3/36 ; ו) 18/36 ; ז) 12/36 ח) 24/36 ט) 33/36. ה׳ ו- ט׳ הם מאורעות משלימים.
45. א) 5/8 ; ב) 3/8 ג) 3/4 ; ד) 3/4 ; ה) 7/8
46. א) 15/45 ; ב) 10/45 ; ג) 39/45 ; ד) 41/45 ; ה) 7/45 ; ו) 32/45 ; ז) 3/45
47. כן.
48. א) 2/6 ; ב) 19/30 ; ג) 5/6 ; ד) 11/30 ; ה) 0.7

ה. <u>לכל הפחות ולכל היותר</u>, עמ' 69

<u>מגלים</u>

תכלית שיעור זה היא לוודא שהתלמידים מבינים את משמעות המונחים *לכל הפחות...* ו*לכל היותר ....* שיעור זה אינו נדרש במפורש בתכנית הלימודים, אך הניסיון מראה שלהרבה תלמידים מונחים אלה קשים הן להבנה והן לשימוש. רכישת הדיוק בהבחנה בין שני המונחים הנעשית על-ידי דיון עדיפה על הסבר חד- פעמי.

מטרת פעילויות הגילוי היא בירור המושגים *לכל היותר* ו*לכל הפחות*. בפעילות הראשונה אריאל צודק ובשנייה הודיה צודקת.

<u>לומדים</u>

הקושי בהבנת המונחים טמון בכך שהמילה **פחות** בביטוי "לכל הפחות..." מובילה לחשיבה הפוכה – שמדובר במשהו שהוא פחות מהמצוין בשאלה. ואילו המילה **יותר** בביטוי "לכל היותר" מובילה לחשיבה הפוכה – שמדובר במשהו שהוא יותר מהמצוין בשאלה.

<u>מתרגלים</u>

בתרגילים 49 - 56 מתרגלים את המושגים החדשים בנוסף לאלו שנלמד עד כה.

49. א) 3/6 ; ב) 3/6 ; ג) 4/6 ; ד) 4/6 ; ה) 1/6 ; ו) 5/6 ; ז) 4/6

50. א) 1/4 ; ב) 3/4 ; ג) 3/4 ; ד) 2/4

51. א) 20 ; ב) 1/20 ; ג) 14/20 ; ד) 10/20

52. א) 35 ; ב) 5/35 ; ג) 30/35 ; ד) 28/35 ; ה) 28/35

53. א) 32 ; ב) 12/32 ; ג) 8/32 ; ד) 24/32 ; ה) 20/32 בסעיף ג' המושג *יותר* כולל רק את מה שמעליו ולא כולל את המספר עצמו. בסעיף ד' *לכל היותר* כולל את המספר עצמו ואת כל מה שתחתיו.

54. א) 1/8 ; ב) 1 ; ג) 4/8 ; ד) 4/8 ; ה) 5/8 ; ו) 3/8 בסעיף ו' "מספר הקטן מ.." לא כולל את המספר עצמו.

55.

ציון	3	6	7	8	10
מספר ציונים	3	3	5	4	1

יש למצוא תחילה את מספר הציונים הכולל כדי שאפשר יהיה לחשב הסתברות.
יש בסך-הכול 16 ציונים.
ב) 4/16 ; ג) 11/16 ; ד) 5/16

56. ב) 28 תלמידים ; ג) 8/28 ; ד) 19/25 ; ה) 8/28

57. א) 0.32 ; ב) 0 ; ג) 0.68 ; ד) 0.75 ; ה) 1

58. א) 0.05 ; ב) 1 ; ג) 0.98 ; ד) 0.02 ; ד) ודאי

מיומנויות, עמ' 73

הסתברות של מאורע היא תמיד מספר חיובי קטן או שווה לאחד, לכן שליטה במעבר בין שברים ומספרים עשרוניים היא אחת מהמיומנויות הנדרשות בחישובים בהסתברות. התלמידים למדו בהרחבה את הנושא בפרק ו' (אחוזים), אך נראה לנו שחזרה זו אינה מיותרת.

הערה: דרך העוקפת את הצורך להעברת כל המספרים לשברים, היא לחשב כמה קוביות יש מכל צבע.

1/7 מהקוביות ירוקות: $56\times1/7 = 8$. 0.25 קוביות כחולות: $56 \times 0.25 = 14$

50% מהקוביות הן אדומות: $56 \times 50/100 = 28$.

לכן מספר הקוביות הלבנות: $56 - (8 + 14 + 28) = 6$.

מוכנים להמשיך? עמ' 75

1. ג ; **2.** ג ; **3.** א ; **4.** ב ; **5.** ב ; **6.** ב ; **7.** א ; **8.** ב ; **9.** ב ; **10.** א.

ממשיכים בתרגול עמ' 77

59. א)בלתי אפשרי ; ב) ודאי ; ג) אפשרי ; ד) ודאי ; ה)בלתי אפשרי
60. א) ודאי. מכפלת שני מספרים שליליים היא תמיד חיובית.
ב) בלתי אפשרי. סכום שני מספרים שליליים תמיד שלילי.
ג) בלתי אפשרי. ; ד) ודאי.
61. א) 3% ; ב) 22% ; ג) 33% ; ד)58%
62. 60%.
64. א) 15, 15, 30 ; ב) חצי, חצי ; ג) 16/30 ; ד)1/10 ; ה)1/5 ; ו) המספר הכולל של האפשרויות הוא מספר השולחנות. בודקים ליד כמה שולחנות יושב אדם בודד. יש 18 שולחנות ועל-יד 6 מתוכם יושב אדם בודד לכן התשובה היא 6/18 שהם 1/3.
66. א) 1/4 ; ב) 1/2 ; ג) 3/4 ; ד) 1/2
67. א
68 . א) ד ; ב)ג-ו-ה , ב-ו-ו ; ג) א, 1/40
69. א) 2/9 ; ב) 1/9 ; ג) 0 ; ד) ת,ו,י
70. א) 50% ; ב) 12.5% ; ג) 50% ; ד) 87.5% ; ה) 75% ; ו) 37.5% ; ז) 25%
71. א) 1/4 ; ב) 2/5 ; ג) 2/3 ; ד) 1/2
72. א) 1/3 ; ב)5/24 ; ג) 3/24 ; ד)1/12 ; ה)¼ ; ו) 7/8 ; ז)7/12 ח) 1/3
73. א) 3/4 ; ב)1/72 ; ג) 1/2 ; ד)3/8 ; ה)71/72
75. א) 38% ; ב) 45%
76. ב) 4/24 ; ג) 1/24 ; ד) 6/24
77. א) 2 ; ב) 1
78. א) 24 ; ב)1/3 ; ג)1/3 ; ג)1/3 ה)1/3 ; ו)1/3
79. א) 1/500, 1/200, 1/100 ; ב) 30/500, 30/200, 6/100 ; ג) 0 ; ד) 6/96 ; ה) 1/96

העמקה, עמ' 85

1. א) 6 ; ב) לא ; ג) לא
2. כן
3. ב) **P(A)** = 40/90 ; **P(B)** = 18/9 ; **P(C)** = 50/90 ; **P(D)** = 90/90 ; **P(E)** = 72/90