יד. גאומטריה דדוקטיבית (המשך)

רקע

פרק זה הוא המשך של הפרק יא' שבו החלו התלמידים ללמוד את הגאומטריה הדדוקטיבית. התלמידים הכירו כבר את המבנה הדדוקטיבית, כולל את המושגים האלה: אקסיומה, משפט, הגדרה, תכונה, והם למדו מבנה היסקי לגאומטריה. עד כה הם למדו בין המשפטים את משפטי החפיפה ואת התכונות של משולש שווה-שוקיים. בפרק זה ימשיכו התלמידים ללמוד להוכיח משפטים שונים. הם ינתחו את משפט פיתגורס באמצעות גאומטריה דדוקטיבית. התלמידים ילמדו על מלבן ועל תכונותיו ועל תכונות של משולש ישר-זווית וכן יוכיחו את משפטי השטח של משולש. המשפטים שבפרק מלווים בתרגול מגוון המספק את צורכי התלמידים ברמות ידע שונות.
פרק זה הוא שגרתי יותר, והוא קל יותר להבנה על-ידי התלמידים לעומת הפרק שבו רק התחילו התלמידים ללמוד על מבנה הדדוקטיבי.
מומלץ להקדיש לפרק זה כ- 7 שעות לימוד.

מושגים ומונחים

מושג, מושג ראשוני, הגדרה, אקסיומה, הנחת משפט, מסקנה, הוכחה, תכונה, נקודה, ישר, מישור, קטע, קרן, מלבן, ריבוע, מרובע, צלעות נגדיות, זווית ישרה, אלכסון, שווה, לחצות, משולש, צלע, זווית, זווית חדה, זווית קהה, משולש ישר-זווית, יתר, ניצב, גובה של משולש, משולשים חופפים, משולשים דומים, תיכון של משולש, משפט פיתגורס, שטח, יחידת שטח, נוסחה, ישרים מאונכים, קטעים מאונכים.

מטרות

התלמידים ידעו:

א. להגדיר מלבן;
ב. לנסח את תכונות המלבן;
ג. להוכיח כי אלכסוני המלבן שווים;
ד. להוכיח שאלכסוני המלבן חוצים זה את זה (לפי יכולת התלמידים);
ה. להשתמש בעובדה כי אם למרובע שני אלכסונים שווים זה לזה וחוצים זה את זה, המרובע הוא מלבן;
ו. להשתמש בתכונות המלבן בפתרון שאלות מתאימות;
ז. לנסח תכונות של משולש ישר-זווית;
ח. להוכיח שבמשולש ישר-זווית סכום זוויות חדות שווה ל- 90^0;
ט. להוכיח שבמשולש ישר-זווית הגובה ליתר מחלק את המשולש לשני משולשים דומים;
י. להוכיח שבמשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה לחצי יתר;
יא. להשתמש בעובדה כי אם במשולש התיכון שווה לחצי צלע שהתיכון הועבר אליה, המשולש הוא ישר-זווית;
יב. להשתמש בתכונות של משולש ישר-זווית בפתרון שאלות מתאימות;
יג. להשתמש בעובדה שבמשולש ישר-זווית מול זווית של 30^0 מונח ניצב השווה לחצי היתר;
יד. להשתמש במשפט פיתגורס בפתרון שאלות מתאימות;
טו. להוכיח את המשפט על שטח המשולש;
טז. להשתמש בנוסחאות השטח של מלבן ושל משולש בפתרון שאלות מתאימות;
יז. למצוא שטח מלבן ושטח משולש כאשר מידותיהם נתונות ביחידת אורך זהה או ביחידות אורך שונות (לדוגמה, אורכה של צלע אחת נתון במטרים ואורך צלע אחרת נתון בסנטימטרים);
יח. לדעת לסרטט מלבן, משולש ישר-זווית, משולש שווה-שוקיים ומעוין על דף משובץ ועל דף חלק.

<u>הערה</u>: מומלץ לדרוש מהתלמידים להוכיח משפטים לפי יכולתם.

ציוד

סרגל, משולש סרטוט, מחוגה, מד-זווית, נספחים לפרק, עיפרון, מחק, כלי הדגמה למורה (סרגל, משולש סרטוט, מחוגה), מחשבון.

מגלים ולומדים, עמ' 245

<u>א. מלבן ותכונותיו</u>, עמ' 245

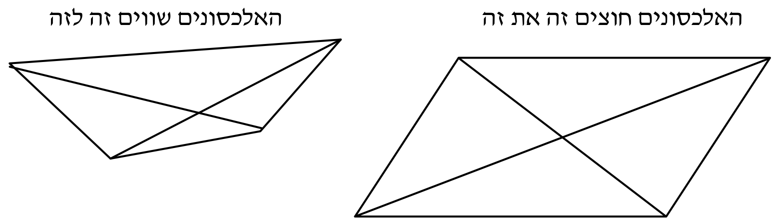
<u>מגלים</u>

התלמידים הכירו כבר את תכונות המלבן עוד בבית הספר היסודי, חזרו עליהן בכיתה ז' בתוך כדי לימוד על גאומטריה קדם-דדוקטיבית. כעת מראים להם הוכחות של תכונות המלבן. פעילויות הגילוי מיועדות לפיתוח הבנה עמוקה יותר בעניין תכונות המלבן ולהכנה להוכחתן.

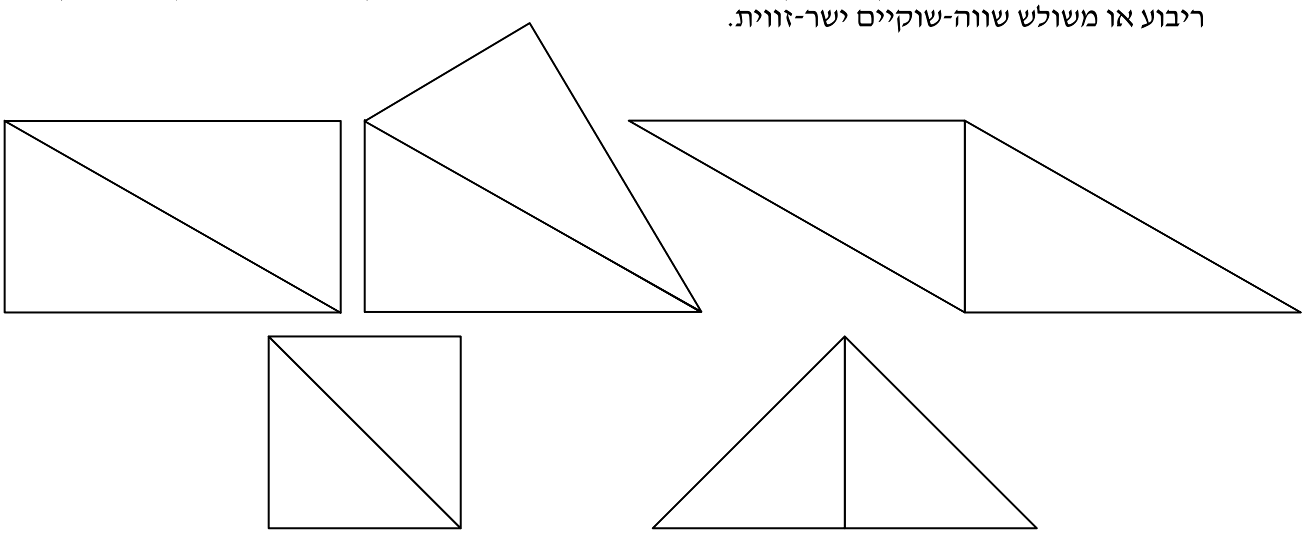
<u>משימות</u>:

1) אין צורך בסרטוט נוסף. כל התשובות נובעות מתכונות המלבן. התלמידים שעדיין אינם בטוחים בתשובה יכולים להשתמש במדידה. אמנם דרך זו אינה דרך של גאומטריה דדוקטיבית אך כדי "להשתכנע" אפשר להתחיל בצורה חזותית. בהמשך, לאחר שיוכחו התכונות, יחול איסור להשתמש במדידות או בדרכים אחרות של גאומטריה קדם-דדוקטיבית.

2) חשוב מאוד לדון בשאלה זו. אם בכיתה ישנן רצועות פלסטיק לבניית מצולעים או רצועות מנייר בגדלים שונים, מומלץ להשתמש בהן כדי להגיע למסקנה נכונה בשאלה זו. א) התלמידים נוטים לסרטט שני קטעים שווים באורכם וחוצים זה את זה, אף-על-פי שהקטעים לא מוכרחים לחצות זה את זה, כי אין מדובר בתנאי זה כלל. כאשר מציירים לא-נכון (שווים וחוצים), מתקבל מלבן, והתלמידים מגיעים למסקנה שגויה בסעיף א'. המטרה של השאלה היא להראות שלא די בתנאי אחד (אלכסונים שווים) כדי שהמרובע יהיה מלבן (ראו סרטוט). ב) בדומה לסעיף א' לא די בתנאי אחד (אלכסונים חוצים זה את זה) כדי שהמרובע יהיה מלבן. באופן כללי, מתקבלת מקבילית (ראו סרטוט).



3) כאשר מצמידים שני משולשים ישרי-זווית חופפים: אם מצמידים יתר אל יתר, מתקבל דלתון; אם מצמידים ניצב אל ניצב מתקבלת מקבילית. אם המשולשים הם שווי-שוקיים וישרי-זווית, אפשר לקבל ריבוע או משולש שווה-שוקיים ישר-זווית.



לומדים

חשוב שהתלמידים יבינו את הגדרת המלבן ויוכלו להבדיל בין הגדרתו לבין תכונותיו שאותן צריך להוכיח. לדוגמה, ההיגד "צלעות נגדיות שוות" אינו חלק של הגדרה, אלא תכונה שנקבעת על-ידי אקסיומת המלבן. לכן אין מוכיחים את תכונה זו. לעומת זאת את התכונות של אלכסוני המלבן מוכיחים, כי אלה הם משפטים. אין דורשים מכל תלמידי הכיתה להוכיח את המשפטים הללו, אלא לפי יכולת התלמידים. עם זאת חשוב שכל תלמידי הכיתה ידעו להשתמש במשפטים אלה לפתרון שאלות.

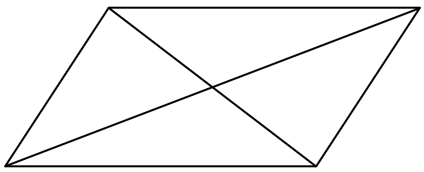
מתרגלים

1. משימת יישום.

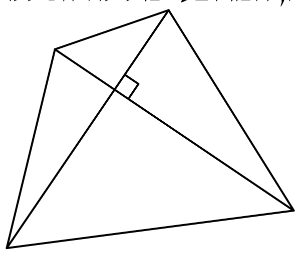
2. משימת יישום. מבצעים את השאלה בעל-פה. 2.25 ס"מ, כי אלכסוני המלבן שווים.

3. לאו דווקא. המרובע יהיה מקבילית, אך אם האלכסונים אינם שווים זה לזה, הוא לא יהיה מלבן. ראו סרטוט.

האלכסונים חוצים זה את זה

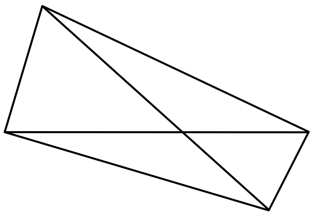


4. לאו דווקא. אם האלכסונים מאונכים זה לזה, המרובע יכול להיות ללא שם מיוחד. ראו סרטוט.



5. כן, המרובע הוא מלבן לפי משפט שהוכח קודם לכן.

7. האורך של הקטעים **OP**, **ON** ו-**OR** שווה ל- 13.5 ס"מ כי אלכסוני המלבן שווים, ולכן גם חצאי האלכסונים שווים. האורך של הקטעים **KP** ו- **RN** שווה ל- 27 ס"מ. האורך של **PN** שווה ל- 10.5 ס"מ, כי צלעות נגדיות של מלבן שוות. חשוב שהתלמידים ינמקו את התשובות.



8. בסרטוט דוגמה למרובע שאינו מלבן.

9. ראו סרטוט לתרגיל 3 שלעיל.

10. ההסבר האפשרי: מסרטטים קטע באורך של 3 ס"מ ועוד קטע באורך זה, כך ששני הקטעים יימצאו על אותו ישר. הקצה המשותף של שני הקטעים משמש נקודת חיתוך של אלכסונים. מנקודה זו מסרטטים קטע באורך 3 ס"מ, השונה מהקטעים שכבר סורטטו. מסרטטים קטע נוסף באותו אורך, כך שהקטע הזה והקטע האחרון יהיו על אותו ישר. לאחר מכן מחברים את ארבעת הקצוות החופשיים זה אחר זה בעזרת קטעים. מתקבל מלבן.

11. למלבן יש סימטריה שיקופית. קו הסימטריה של המלבן עובר דרך אמצעי הצלעות הנגדיות שלו. למלבן יש שני קווי סימטריה.

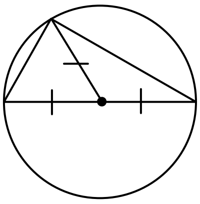
לומדים

בחלק זה של השיעור מובאות תכונות של משולש ישר-זווית והוכחותיהן. יש תכונות המוכרות לתלמידים מלימודים קודמים. התכונה החדשה לתלמידים היא תכונת התיכון ליתר במשולש ישר-זווית. מומלץ ללמד את ההוכחות על-פי רמת התלמידים, אך יש ללמד את כולם להשתמש בתכונות אלה לפתרון שאלות.

מתרגלים

12. אורך התיכון הוא 3 ס"מ. המשפט על התיכון ליתר מובא בחלק "לומדים".

13. 18^0 ו- 62^0. למסקנה מגיעים על-סמך המשפט על סכום זוויות במשולש או על-סמך המשפט על סכום זוויות חדות במשולש ישר-זווית.



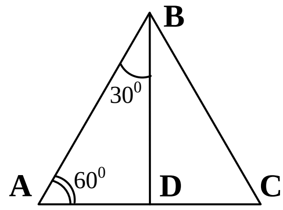
16. משימת יישום של משפט על סכום זוויות במשולש.

18. משימת יישום על תכונת התיכון ליתר במשולש ישר-זווית.

19. המשולש המתקבל הוא ישר-זווית. הקוטר הוא היתר של המשולש. בסרטוט הקטעים המסומנים שווים באורכם, שכן הם רדיוסים של המעגל, לכן התנאים של משפט על תיכון השווה לחצי צלע שהוא יורד אליה, מתקיימים, והמשולש הוא ישר-זווית.

20. הסרטוט כמו השאלה הקודמת. זוהי מסקנה ישרה הנובעת מהמשפט על תיכון ויתר במשולש ישר-זווית.
במשולש ישר-זווית התיכון שווה לחצי יתר, לכן כל הקדקודים של המשולש רחוקים במרחק שווה מנקודת המפגש שלהם, כלומר נמצאים על המעגל שמרכזו נקודת המפגש.

21. אחת הדרכים להוכיח את הנדרש היא להשלים את המשולש הנתון למשולש שווה-צלעות (ראו סרטוט). ההשלמה נעשית כך: לניצב שמול הזווית שמידתה 60^0, מצמידים את המשולש החופף לנתון. כל מידתה של כל אחת מהזוויות של המשולש **ABC,** שמתקבל היא 60^0, לכן המשולש **ABC** הוא שווה-צלעות. לפיכך הקטע **AD** הוא חצי של **AC** לפי הבנייה. כלומר הקטע **AD** הוא חצי של **AB**, כי **AB** = **AC** (משולש שווה-צלעות). הוכַח כי מול זווית של 30^0 מונח ניצב השווה לחצי יתר.



22. לאחר שמסרטטים את המשולש, רואים שמול זווית של 30^0 מונח גובה שצריך למצוא את אורכו. התשובה: 17.5 ס"מ.

23. שני המשולשים **APC** ו- **ABM** חופפים לפי משפט החפיפה זווית-צלע-זווית: הזווית **A** – זווית משותפת לשני המשולשים, הזוויות **M** ו- **C** – זוויות ישרות, והצלעות **AM** ו- **AC** שוות לפי הנתונים. לפיכך הצלעות המתאימות **MB** ו- **PC** במשולשים החופפים-שוות.

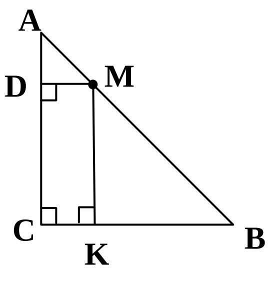
28. המשולשים יהיו חופפים על-סמך המשפט שמשולשים ישרי-זווית שניצביהם שווים זה לזה חופפים.

29. זוהי אחת המשאלות הפשוטות והיפות. מומלץ להרבות בשאלות מסוג זה. לפי הנתונים שבסרטוט מגיעים למסקנה שמידת הזווית **MCK** שווה ל- 30^0. לפיכך הקטע **MK** הוא חצי מ-**MC**. ואילו הקטע **MC** הוא חצי מ-**MA**. התשובה: אורך **MK** הוא 20 ס"מ.

30. 5 ס"מ.

31. גובה במשולש שווה-צלעות הוא גם חוצה-זווית של זווית שהגובה יורד ממנה. לכן הזווית בין שני הגבהים היא זווית בין שני חוצי-זווית. מידת הזווית הזו היא 120^0 (או 60^0). צריך לבצע סרטוט מתאים ולכתוב בו את מידות הזוויות הרלוונטיות.

32. לפי הנתונים, המשולש **KPS** הוא שווה-שוקיים, לכן הזוויות **K** ו **P** – שוות. המשולשים **APV** ו- **EKD** חופפים לפי משפט החפיפה זווית-צלע-זווית, ולכן הצלעות **DE** ו- **AV**, שהן הצלעות המתאימות במשולשים אלה, הן שוות.



33. המרובע שמתקבל **DMKC** הוא מלבן. המשולש **ACB** ישר-זווית ושווה-שוקיים, לכן $\angle A = \angle B = 45°$. במשולש KMB מידת הזווית M היא 45^0, לכן המשולש KMB הוא שווה-שוקיים. לפיכך KM = KB. המסקנה היא כי $CK + KM = CK + KB = 5$ ס"מ. התשובה: היקף המלבן 10 ס"מ.

34. נשתמש בסרטוט שבספר לתלמיד. המרובע שהתקבל הוא מלבן (ראו הסברים בתרגילים 22, 23). לפיכך **CD** = **KL** משום שהם אלכסוני המלבן.

ב. כיצד מגיעים למשפט פיתגורס, עמ' 464

מגלים

המטרה של החלק הזה היא להבהיר כיצד הגענו למשפט פיתגורס. משפט פיתגורס נלמד בגאומטריה קדם-דדוקטיבית, כאשר התלמידים לא הכירו את האקסיומות ואת חוקי ההיגיון שמשתמשים בהם בהוכחה. אין חוזרים על ההוכחה בשלמותה, אלא מנתחים את שלבי ההוכחה שנעשתה בפרק ז'. מומלץ להראות לתלמידי הכיתה את הדרך פעם אחת, ולא לדרוש מכל התלמידים שיחזרו על כך. ההוכחה נשענת על שלוש האקסיומות ועל משפטים קודמים על סכום זוויות חדות במשולש ישר-זווית. נוסף על כך, יש בהוכחה שימוש בתכונות השטח שנדבר עליהן בהמשך.

לומדים

בתום הניתוח שבפעילות הקודמת מובא תרשים חצים המראה קשר בין משפט פיתגורס לבין משפטים קודמים ואקסיומות. התלמידים אינם אמורים לזכור אותו, אלא להבין שהוכחת משפט כגון משפט פיתגורס היא התוצאה של תהליך רב-שלבים המשלב שימוש קפדני בכללים לוגיים ברורים. חשוב יותר שהתלמידים ידעו את משפט פיתגורס עצמו וידעו להשתמש בו לפתרון שאלות.

מתרגלים

במשימות הבאות ניתן להשתמש במחשבון כדי לחסוך זמן.

37. לפי משפט פיתגורס, התשובה היא 10 ס"מ.

38. לפי משפט פיתגורס, התשובה היא $\sqrt{15}$ ס"מ. אין צורך בהוצאת שורש.

39. מומלץ לעודד את התלמידים להשתמש במחשבון. התשובות: א) 1.3 ס"מ; ב) בערך 19.2 ס"מ.

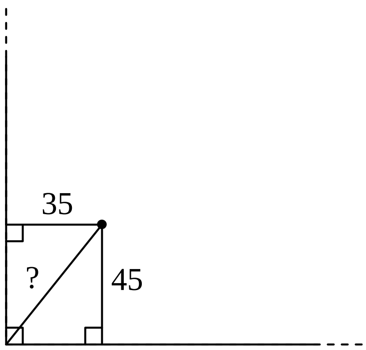
40. התשובות: א) $\sqrt{5}$ ס"מ; ב) בערך 84 ס"מ

42. אחת המשאלות השגרתיות בנושא משפט פיתגורס. שאלה דו-שלבית. תחילה מוצאים את אורכו של הקטע BD, שהוא ניצב במשולש BDC, ולאחר מכן מוצאים את ה- x, שהוא היתר במשולש BDA. $BD = 12$, $x = 13$.

43. בתרגיל זה מובאות ארבע שאלות חישוב שגרתיות לפי משפט פיתגורס. א) שאלה דו-שלבית. תחילה מוצאים את היתר במשולש ישר-זווית שאורכי ניצביו הם 6 ו- 8. היתר הוא באורך של 10. לאחר מכן מוצאים את היתר במשולש ישר-זווית שאורכי ניצביו הם 10 ו- 7.5. אורך היתר הוא 12.5. היקף המרובע הוא סכום אורכי כל צלעותיו: $12.5 + 7.5 + 8 + 6 = 34$. ב) התרגיל מסומן כקשה משום שהנימוקים בו הם נימוקים לוגיים. למעשה, משימת החישוב עצמה אינה קשה כלל. דרך הפתרון מבוססת על בניית עזר, כאשר מעבירים את הגובה מקדקוד הטרפז. שימו לב, התלמידים אינם מכירים את הטרפז בגאומטריה דדוקטיבית, אך הם יכולים לנמק שמתקבל מלבן (אין אפילו צורך להיזכר בטרפז). המלבן מתקבל לפי אקסיומת המלבן – אם במרובע שלוש זוויות ישרות, גם הרביעית היא ישרה. לאחר שהתקבל מלבן, מחשבים את הצלע הרביעית של המרובע בעזרת משפט פיתגורס: $12^2 + 15^2 = 369$; $\sqrt{369} \approx 19.2$. היקף המרובע בערך 56.2. ג) ההסברים והחישובים הם בדומה לסעיף א'. ההיקף שווה ל- 32. ד) משולש ישר-זווית שמידתה של אחת מזוויותיו היא 45^0 הוא משולש שווה-שוקיים. אורכי הניצבים הם 4, והיתר יהיה $\sqrt{32}$ + 12.

44. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה וחוצים זה את זה. כל צלעותיו של מעוין שוות זו לזו. אורך צלע המעוין הוא 10 ס"מ.

45. הזכירו לתלמידים ש"מרחק מנקודה לישר" הוא "אורך האנך מהנקודה לישר". הסרטוט יכול להיראות כך: המרובע שנראה בסרטוט הוא מלבן, כי יש לו שלוש זוויות ישרות, ולפי אקסיומת המלבן, גם הרביעית תהיה ישרה. לכן אורך אלכסון המלבן הוא המרחק המבוקש. התשובה: בערך 57 ס"מ.

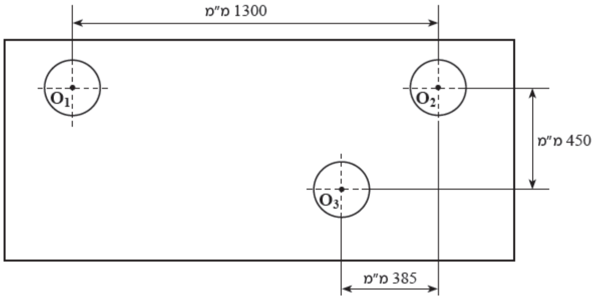


46. 5 מ'.

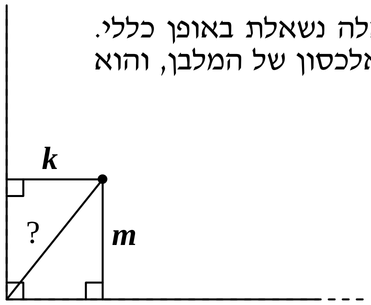
47. לפי משפט פיתגורס די לסרטט משולש ישר-זווית שהניצבים בו הם באורך של 2.5 ס"מ ו- 3.5 ס"מ, ולבנות את הריבוע שאורך צלעו יהיה שווה לאורך היתר של המשולש הזה. אין שום צורך לחשב את אורך היתר. שטח הריבוע הבנוי על יתר המשולש יהיה שווה לסכום שטחי הריבועים הנתונים.

48. הקושי בשאלה מתבטא במידות ובסרטוט שהתלמידים אינם רגילים אליו.
המרחק בין המעגלים O_1 ו- O_2 שווה ל- 1,300 מ"מ, שהם 130 ס"מ או 1.3 מ'.
את שני המרחקים האחרים מחשבים בעזרת משפט פיתגורס לפי המידות הידועות.

המרחק בין המעגלים O_3 ו- O_2 יחושב כך : $\sqrt{385^2+450^2}=\sqrt{350{,}725}\approx 592{,}2$. המרחק שווה בערך ל- 592,2 מ״מ. המרחק בין O_3 ו- O_1 יחושב לפי משפט פיתגורס. המרחק הזה הוא היתר במשולש ישר-זווית, כאשר הניצבים של המשולש הם באורך 450 מ״מ ו- 915 מ״מ. האורך בין המרכזים הוא בערך 1,020 מ״מ, שהם 102 ס״מ או 1.02 מ׳.



49. המשימה דומה למשימה 45, אך כאן אין מספרים, אלא השאלה נשאלת באופן כללי. מתקבל מלבן. המרחק מהנקודה לקדקוד הזווית הוא אורך האלכסון של המלבן, והוא יחושב כך : $\sqrt{k^2+m^2}$



ג. <u>משפטי שטח</u>, עמ׳ 467

<u>מגלים</u>

התלמידים חישבו שטחים כבר בבית-הספר היסודי, לכן החומר מוכר לכם היטב. מטרת פעילויות הגילוי היא להיזכר בדרכים לחישוב שטחים של משולשים ושל צורות מורכבות ממשולשים וכן להיזכר בתכונות השטח.

<u>משימות</u>:

1) חישוב שטח המלבן מוכר לתלמידים. הקושי היחיד בתרגיל זה בא לידי ביטוי בכך שהנתונים הם שברים ומספרים עשרוניים. זו הזדמנות להיזכר בכפל ובחילוק של שברים ושל מספרים עשרוניים. א) 24 סמ״ר ; ב) 12 סמ״ר ; ג) $\frac{57}{65}$ מ״ר.
2) שטח משולש ישר-זווית שווה למחצית שטח המלבן שאורכי צלעותיו הם אורכי הניצבים של המשולש הנתון. 10 סמ״ר.
3) שטח המשולש הנתון שווה לסכום שטחי המשולשים ישרי-הזווית המתקבלים על-ידי העברת הגובה לצלע הנתונה. התשובה : 16.
4) את שטח המחומש אפשר לחשב על-ידי חיבור שטחים של משולשים המתקבלים על-ידי העברת האלכסונים של המחומש. החישוב נעשה בשלבים כך : 6 סמ״ר = $S_{\Delta PMS}$, 5 ס״מ = **SM**, 30 סמ״ר = $S_{\Delta KMS}$, 13 ס״מ = SK , 13 סמ״ר = $S_{\Delta KTS}$, לפיכך שטח המחומש הוא : 49 סמ״ר = $S = 6 + 30 + 13$.

<u>לומדים</u>

המושג *שטח* הוא מושג אקסיומתי, כלומר הוא מוגדר על-ידי שלוש אקסיומות החייבות להתקיים בו-זמנית. למושג *שטח* שתי פנים : משתמשים במונח *שטח* כאשר מציירים מה שמוגבל על-ידי קו סגור וגם כאשר מדובר במידה של המקום המוגבל על-ידי קו סגור. בדרך כלל, אפשר להבין לאיזו משמעות מתכוונים על-פי קשר המשימה. שלוש אקסיומות מתארות שטח כמידה. אמנם התלמידים עסקו בשטחים של צורות בכיתות יסוד, בכיתה ז׳ וגם בפרקים הקודמים של כיתה ח׳, אך סביר להניח שחלק מהם אינם זוכרים היטב את הקשרים בין יחידות השטח השונות. מומלץ להזכיר לתלמידים את היחידות העשרוניות של שטח. אפשר להכין לוח מידות על גבי בריסטול ולתלות אותו על קיר הכיתה כדי לייעל את שיעורי הגאומטריה. דוגמה לקשר בין יחידות השטח : 10,000 סמ״ר = 1 מ״ר . חשוב להזכיר לתלמידים

שיחידות אורך ויחידות שטח שונות מהותית, ולכן סנטימטר אינו יחידת שטח. הזהירו את התלמידים מפני טעויות מסוג: שטח הצורה היא 10 ס״מ. תשובה כזו אינה נכונה! חישוב שטחים מורכבים ממצולעים אפשר לבצע על-ידי חלוקת השטח הנתון למשולשים, כאשר למשולשים סמוכים אין חלקים משותפים, פרט לצלע אחת. משתמשים בתכונה של שטח: שטח הצורה שווה לסכום שטחי החלקים. לצורות חופפות יש שטח שווה – זוהי עוד תכונה שימושית של השטח. שימו לב שההפוך אינו נכון: אם לשתי צורות יש שטח שווה, הצורות לאו דווקא חופפות. לדוגמה, מלבן אורכי הצלעות של מלבן הם 2 ס״מ ו- 8 ס״מ, ואורך צלע הריבוע הוא 4 ס״מ. המרובעים האלה אינם חופפים, אף-על-פי יש להם שטח שווה. נוסחאות השטח של משולש מוכרות לתלמידים מכיתה ה׳. יש דרכים שונות להוכיח את נוסחאות שטח המשולש. הדרך המומלצת בספר המבוססת על שטח משולש ישר-זווית, היא דרך קלה ומובנת לרוב התלמידים, וההוכחה אינה מורכבת. בכל זאת אפשר לדלג על חלק מההוכחה אם אין זמן לעבור על כל פרטיה.

מתרגלים

50. משימת יישום ישיר. ג) 1 מ״ר.

51. זהו ריבוע שצלעו a. שטחו a^2.

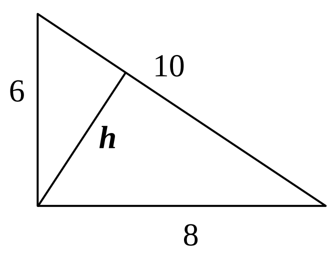
52. שאלת חישוב שגרתית. אפשר לפתור אותה בדרכים אלגברית לדוגמה, כך: נסמן את מקדם הפרופורציה ב- x. כך צלע אחת היא (2x) מ׳, והצלע השנייה היא (3x) מ׳. שטח המלבן הוא מכפלת מידותיו וכלומר $S = (3\cdot x)\cdot(2\cdot x) = 6\cdot x^2$. לפי הנתון, שטח המלבן שווה ל- 24 מ״ר. אפשר לרשום את המשוואה: $6\cdot x^2 = 24$. לפיכך $x^2 = 4$ ו- $x = 2$. הפתרון השני של המשוואה שהוא 2-, אינו מתאים כלל כי מדובר במספרים חיוביים בלבד. לפיכך מקדם הפרופורציה הוא 2, ואורכי צלעות המלבן הם 4 מ׳ ו- 6 מ׳. מומלץ לבדוק את התשובה על-ידי מציאת שטח המלבן. ואמנם שטח המלבן שווה ל- 24 מ״ר.

55. 124 ס״מ.

56. שאלת חישוב שגרתית המכילה שברים. ג) על התלמידים להפוך את המספר המעורב לשבר ואחר-כך לחשב את השטח. ג) 73.96 סמ״ר.

57. מוצאים את אורך הצלע ולאחר מכן כופלים אותו ב- 4. ב) $4\cdot\sqrt{0.81} \approx 4\cdot 0.9 = 3.6$.

59. משימת יישום לנוסחת החישוב של שטח משולש ישר-זווית. א) 12 סמ״ר; ב) תחילה יש להאחיד את יחידות האורך ולאחר מכן לחשב לפי הנוסחה את שטחו של המשולש. 2.5 מ׳ הם 250 ס״מ. שטח המשולש הוא 60,000 סמ״ר שהם 6 מ״ר. אם ממירים סנטימטרים למטרים, 480 ס״מ הם 4.8 מ׳. שטח המשולש במטרים רְבועים הוא 6 מ״ר.



60. אורך היתר של המשולש הוא 10 ס״מ. הדרך הפשוטה ביותר לחשב את הגובה h היא להיעזר בשטח המשולש. המשולש הוא ישר-זווית, לכן שטחו שווה לחצי ממכפלת אורכי הניצבים, כלומר 24 סמ״ר. השטח של אותו משולש שווה למחצית המכפלה של אורך היתר באורך הגובה היורד ליתר, כלומר $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot h = 24$. לפיכך $h = 4.8$. אורך הגובה הוא 4.8 ס״מ.

61. משימה דומה למשימה 40. אם מגדילים אחת מהצלעות של משולש פי מספר חיובי, והגובה לצלע זו אינו משתנה, שטח המשולש יגדל פי אותו מספר. אם מגדילים את הצלע ומקטינים את הגובה לצלע זו, השטח יגדל פי מספר השווה למנת החילוק של המספר הגדול במספר הקטן. א) השטח יגדל פי 3. ב) השטח יגדל פי 2. ג) השטח יגדל פי 1.25.

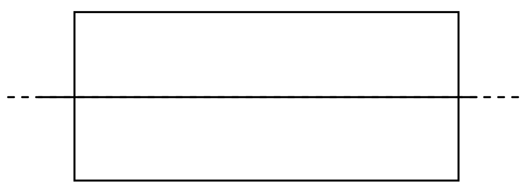
62. בשני המשולשים אותו גובה והצלע שהגובה יורד אליה היא חצי מהצלע שבמשולש המקורי.

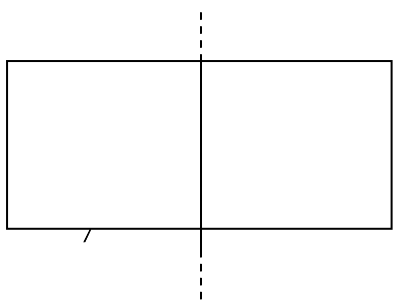
63. התיכון BM מחלק את המשולש לשני משולשים שווי-שטח. כל משולש שהתקבל מתחלק לשני משולשים שווי-שטח על-ידי העברת תיכון לצלע BM. לפיכך התקבלו ארבעה משולשים שווי-שטח.

64. אלכסונים של ריבוע מחלקים אותו לארבע משולשים ישרי-זווית שווי-שוקיים חופפים שניצביהם הם חצאי האלכסונים של הריבוע. שטח הריבוע הוא 128 סמ״ר.

68. השאלה דומה לשאלה הקודמת אך הפעם מבקשים למצוא את היקף המלבן. תחילה מוצאים את מקדם הדמיון (כמו בשאלה 42 לעיל). מקדם הדמיון שווה ל- 6. לאחר מכן מוצאים את אורכי צלעותיו של מלבן, שהם 6 ס״מ ו- 12 ס״מ. לבסוף מוצאים את היקף המלבן, שהוא 36 ס״מ.

69. המלבן חולק לשני מלבנים חופפים, לכן שטח המלבן הקטן שווה לחצי משטח המלבן הנתון. לפניכם שתי אפשרויות לסרטוט. התשובה: 30 ס״מ או 24 ס״מ.





70. שאלת חישוב שגרתית המכילה שברים. על התלמידים להוציא שורש של מספר נתון. ב)

$\sqrt{5\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$.

71. צלע הריבוע שווה ל- 5 ס״מ. שטח הריבוע הוא 25 סמ״ר. דוגמאות למידות המלבנים: 1 ס״מ ו- 25 ס״מ או 2 ס״מ ו- 12.5 ס״מ. למעשה, ישנם אין-סוף אפשרויות.

72. בתרגיל זה משלבים שני סוגי פעילות: 1) חישוב; 2) סרטוט לאחר החישוב. השאלות אינן קשות, אך יש לנתח את הנתונים ולהבין מה צריך לחשב כדי לסרטט מלבן לפי הדרישות. הסבו את תשומת לבם של התלמידים גם לכך שהאורכים נתונים במילימטרים (שזה נדיר בשאלות של כיתה ח׳). סנטימטר אחד הוא עשרה מילימטרים. לפי הדרישה שבכל סעיף, יש לחשב את שטחו של המלבן הנתון. מבצעים את החישוב פעם אחת בסעיף א׳, ולאחר מכן משתמשים בתוצאה בכל הסעיפים א׳-ג׳. שטח המלבן A הוא 3,600 ממ״ר (מילימטר רָבוּע). א) אורך הצלע השנייה של המלבן הוא 30 מ״מ. יש לסרטט מלבן שמידותיו על 120 מ״מ ו- 30 מ״מ או 12 ס״מ ו- 3 ס״מ. ב) בתרגילים 52 ו- 68 עסקו התלמידים בחישוב אורכי צלעותיו של מלבן, כאשר היחס בין הצלעות הסמוכות נתון. כאן אורכי הצלעות של המלבן החדש הם 120 מ״מ ו- 30 מ״מ. בעצם, מלבן זה כבר סורטט בסעיף א׳.
ג) אורך צלע הריבוע הוא 60 מ״מ שהם 6 ס״מ.

74. שטח המשולש הראשון הוא 20 סמ״ר, וזהו גם שטח המשולש השני. נסמן את הגובה של המשולש השני ב- x ונפתור את המשוואה. $\frac{1}{2}\cdot 20\cdot x=20$. $x=2$, כלומר אורך הגובה שווה ל- 2 ס״מ.

75. $y=5$.

מיומנויות, עמ׳ 268

במיומנויות של פרק זה מלמדים את התלמידים לבנות (לסרטט) מעוין, משולש שווה-שוקיים ומלבן על דף משבצות ועל דף חלק בדרכים יעילות.

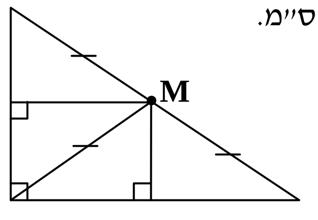
מוכנים להמשיך? עמ׳ 270

1) ג׳; 2) ג׳; 3) ג׳; 4) ד׳; 5) ב׳; 6) א׳.

ממשיכים בתרגול, עמ׳ 271

83. הטענות הנכונות הן א׳, ג׳, ד׳, ה׳, ו׳. חשוב לדון עם התלמידים על נימוקיהם.

84. בסרטוט שלפניכם מסומנים נתונים הכתובים במילים. המרובע שמתקבל הוא מלבן, על-פי אקסיומת המלבן – אם במרובע שלוש זוויות ישרות, גם הזווית הרביעית ישרה – ולפי הגדרת המלבן – המרובע שכל הזוויות שלו ישרות, הוא מלבן. הקטעים המסומנים בסרטוט הם קטעים שווים כי נקודת המפגש שלהם **M** היא אמצע היתר של המשולש הנתון, ולכן תיכון ליתר הוא אלכסון של מלבן, ולכן הוא שווה לחצי היתר. התשובה: 6 ס״מ.



85. לשני המשולשים אותו גובה היורד לצלעות AD ו- CD. אחת הצלעות גדולה פי 3 מהצלע השנייה, לכן שטח המשולש ABD גדול פי 3 משטח המשולש BDC וסכום השטחים הוא 24 סמ״ר. השטחים הם 6 סמ״ר ו- 18 סמ״ר.

86. הישר עובר דרך התיכון לאחת הצלעות של המשולש.

87. די לחלק את אחת הצלעות של המשולש לשלושה חלקים שווים, ודרך נקודות החלוקה להעביר שני ישרים העוברים גם דרך הקדקוד שמול הצלע.

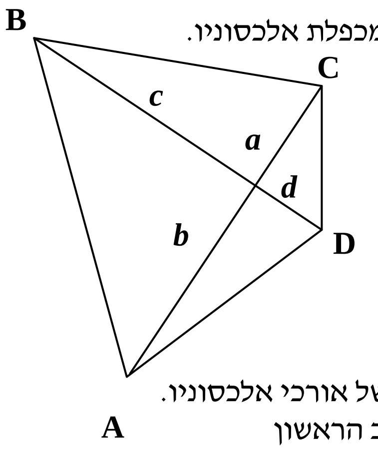
88. די לחלק את אחת הצלעות של המשולש לחמישה חלקים שווים. הישר שיחלק את המשולש ביחס הנדרש יעבור דרך קדקוד המשולש שמול הצלע המחולקת ודרך הנקודה המחלקת את הצלע ביחס 2 :3.

89. משימה דומה למשימה קודמת. האלכסונים של מעוין מחלקים אותו לארבעה משולשים ישרי-זווית שווי-שוקיים חופפים שניצב אחד שלהם חצי אלכסון אחד, והניצב האחר הוא חצי של האלכסון האחר. שטח המעוין הוא 60 סמ"ר.

90. עודדו את התלמידים לסרטט מעוין ואת אלכסוניו. האלכסונים של מעוין מחלקים אותו לארבעה משולשים ישרי-זווית שווי-שוקיים חופפים שניצב אחד שלהם הוא חצי אלכסון אחד, והניצב האחר הוא חצי מהאלכסון האחר. שטח של כל משולש הוא מחצית ממכפלת אורכי הניצבים, והשטח של כל המעוין שווה לארבע פעמים שטח המשולש. נסמן את האלכסונים ב- d_1 וב-d_2. השטח יחושב כך:

$S = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}\cdot d_1)\cdot(\frac{1}{2}\cdot d_2)=\frac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2$. כלומר שטח המעוין שווה למחצית מכפלת אלכסוניו.

במסקנה זו אפשר להשתמש בפתרון השאלות.



91. ההוכחה דומה להוכחה בתרגיל 90, אך היא מורכבת יותר.

בסרטוט סמנו חלקי האלכסונים באותיות a, b, c, d

כך ש- $a + b = AC$, ו- $c + d = BD$. שטח המרובע יחושב כך:

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot d+\frac{1}{2}\cdot a\cdot c+\frac{1}{2}\cdot b\cdot d+\frac{1}{2}\cdot b\cdot c=\frac{1}{2}\cdot a\cdot(d+c)+\frac{1}{2}\cdot b\cdot(c+d)$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot BD+\frac{1}{2}\cdot b\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot(a+b)=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AC$$

כלומר שטח המרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה, שווה למחצית המכפלה של אורכי אלכסוניו.

92. בהוכחה שני שלבים. נניח שהאלכסונים חותכים זה את זה בנקודה **O**. בשלב הראשון מוכיחים ש- **AO** הוא תיכון ל- **BD**. בשלב השני מתבוננים במשולש **BCD** ומשתמשים במשפט האומר שאם במשולש גובה ותיכון מתלכדים, המשולש הוא שווה-שוקיים.

95. רצוי להזכיר לתלמידים כיצד נקבע דמיון של משולשים לפי זוויות של משולש.

הנתונים: ΔABC, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, CH הוא הגובה לצלע AB.

המסקנה: $\Delta AHC \sim \Delta CHB$.

ידוע כי סכום הזוויות החדות במשולש ישר-זווית הוא 90°. לפיכך $\alpha + \beta = 90^\circ$.

לפי הנתונים, CH מאונך ל- AB. לכן $\angle CHA = 90^\circ$ ו- $\angle BHC = 90^\circ$.

במשולש ישר זווית AHC סכום הזוויות ACH ו- CAH שווה ל- 90°.

$\angle CAH + \angle ACH = \alpha + \angle ACH = 90^\circ$. מכיוון ש- $\alpha + \beta = 90^\circ$, מתקבל: $\angle ACH = \beta$.

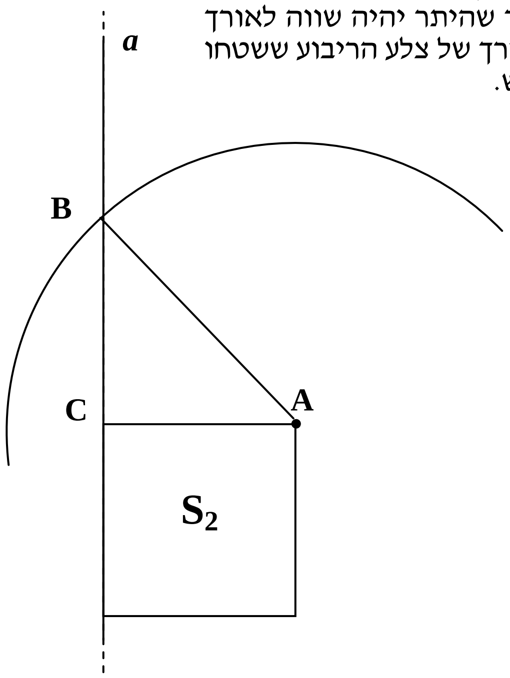
כעת במשולש ACH יש זווית אחת ישרה וזווית β, ובמשולש CBH יש זווית אחת ישרה וזווית β.

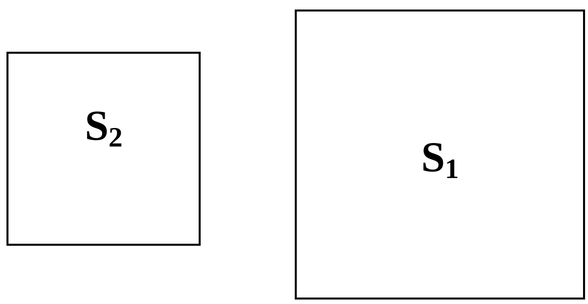
לפיכך, $\Delta AHC \sim \Delta CHB$ לפי משפט דמיון המשולשים הראשון.

97. על התלמידים לחשב את שטח המחומש. כעת התלמידים יודעים לחשב את השטח של משולש כלשהו ושל מלבן. לפי תכונות השטח, שטח צורה שווה לסכום שטחי חלקיה. לפיכך אפשר לחלק את המחומש למשולשים ולמלבנים לחשב את שטחה של כל צורה זו ולחבר את השטחים. א) המחומש מורכב מהמלבן שמידותיו הן 22 ו- 90, ומהמשולש שאורך צלעו 90 ואורך הגובה לצלע זו הוא 23. שטח המחומש שווה ל- 3015. ב) אפשרות לחלוקה של מחומש: המחומש מורכב ממלבן שמידותיו 30 ו- 44, ממשולש ישר-זווית שאורכי ניצביו הם 22 ו- 15, וממשולש ישר-זווית שאורכי ניצביו הם 8 ו- 29. סכום כל שלושת השטחים שווה לשטח המחומש, שהוא 1,601.

98. משתמשים במשפט פיתגורס. די לבנות משולש ישר-זווית, כך שהיתר יהיה שווה לאורך הצלע של הריבוע ששטחו גדול יותר, ואחד הניצבים יהיה באורך של צלע הריבוע ששטחו קטן יותר. הריבוע הבנוי על הניצב השני יהיה הריבוע המבוקש.

<u>נתונים</u>: ריבוע S_1 ו- ריבוע S_2.





<u>יש לבנות</u>: ריבוע S_3 כך ש- $S_3 = S_1 - S_2$.

הבנייה נעשית כך: בונים את הריבוע S_2 וישר a כמו בסרטוט.
מהנקודה **A** מעבירים בעזרת מחוגה מעגל ברדיוס צלע הריבוע S_1 .
בסרטוט רואים קשת. אחת מנקודות החיתוך של הישר ושל המעגל
היא הנקודה **B** – הקדקוד השלישי של המשולש **ABC**. הקטע **BC** הוא צלע של הריבוע המבוקש.

העמקה, עמ' 275

ח. <u>מבנה היסקי לגאומטריה</u>, עמ' 275

<u>**מגלים**</u>
מטרת חלק זה של הפרק היא להראות לתלמידים את היופי בגאומטריה דדוקטיבית, שבא לידי ביטוי במבנה ההיסקי שלה. כל משפט נובע באופן הגיוני מהמשפטים הקודמים לו ומהאקסיומות, כל מושג מבוסס על המושגים הקודמים ועל המושגים הראשוניים, ולפיכך אפשר להמשיך לפתח את הגאומטריה ולמצוא קשרים חדשים בין המושגים ולגלות את תכונות המושגים שנלמדו. בעזרת פעילויות הגילוי המובאות בחלק זה, התלמידים מחדדים את הבנתם לגבי חלוקת טענות לאקסיומות ולמשפטים.

<u>משימות</u>:
במשימה זו התלמידים נדרשים למיין את ההיגדים לאקסיומות ולמשפטים. ההיגד השלישי, ההיגד החמישי וההיגד האחרון הם אקסיומות ויתר ההיגדים הם המשפטים. ההיגדים אינם ממוספרים כדי לא לקבע את החשיבה וכדי לא לקשור בין מספר ההיגד לבין מיקומו בהירכיה. מומלץ מאוד לעודד את התלמידים להיעזר בנספח, לגזור ממנו את ההיגדים ולסדר אותם בפועל על השולחן. כך ישיגו התלמידים את ההבנה בעניין מה נובע ממה. אפשר להציע לתלמידים לסדר את ההיגדים כך שהבסיסיים ביותר יהיו למעלה, וכל היגד שנובע מההיגדים הקודמים יהיה למטה יותר. כלומר הסידור ייראה בערך כמו בחלק "לומדים" שבשיעור, כאשר בראש התרשים מסודרות האקסיומות.

<u>**לומדים**</u>
בחלק זה של שיעור מובא תרשים זרימה המראה סידור אקסיומות ומשפטים בזה אחר זה. כך אפשר לראות על אילו היגדים קודמים מבוסס כל היגד. כל היגד הנובע מהיגדים קודמים, הוא משפט. הקשרים בין ההיגדים הוראו על-ידי חצים, כך שראש החץ מצביע על משפט הנובע מההיגדים הקודמים. יש משפטים המבוססים על משפט קודם אחד בלבד או על אקסיומה אחת ויש משפטים המבוססים על כמה משפטים קודמים. יש לשים לב שבתרשים כלולים כל האקסיומות והמשפטים שנלמדו עד כה, אך גם בתרשים מורכב זה אין דיוק מוחלט. לדוגמה, מובאות בו רק שלוש אקסיומות, וכידוע, ישנן יותר אקסיומות שאינן מוזכרות כדי לא להעמיס על התלמידים. אפשר לבקש מהתלמידים לנתח משפט מסוים, ולנתח יחד אתם על מה מבוססת הוכחתו. מומלץ לעבוד בתרשים בחלקים. אין דורשים את שינון התרשים כלל. דוגמאות לשאלות שמובילות להבנת מבנה היסקי של גאומטריה מובאות במשימות הבאות.

<u>**מתרגלים**</u>
100. מומלץ לענות על השאלות בעל-פה. המשימה מיועדת לכל תלמידי הכיתה. הם לומדים להבין את משמעות החצים שבתרשים. א) משפט על סכום הזוויות הלא-ישרות במשולש ישר-זווית. ב) אקסיומת ההעתקות. ג) כדי לראות את הדרך מוצאים את המשפט ו"הולכים אחורה". ההיגד (המשפט או האקסיומה) העומד בתחילת החץ הוא הבסיס למשפט נתון. המשפט הנתון בסעיף זה מבוסס על שלושה משפטים קודמים.
101. כל המשולשים האלה יהיו חופפים.
102. מתקבל משולש שווה-שוקיים שאינו שווה-צלעות. חשוב לעודד את התלמידים לסרטט משולש לפי ההוראות, כך הם יסרטטו משולש שווה-שוקיים בדרך יעילה.