יז. גיאומטריה במרחב

רקע

פרק זה הוא הפרק האחרון בספר של כיתה ח' והיחיד המוקדש לגאומטריה במרחב.
שלושת הנושאים שכלולים בתכנית הלימודים הם:

- התיבה: חישוב אלכסון;
- מנסרות: שטח פנים ונפח;
- פירמידה: שטח פנים ופריסה, וכן חישובים הקשורים למשפט פיתגורס.

שני השיעורים הראשונים, שבהם מובאות הגדרות ותכונות הקשורות למקבילות ולמאונכות במרחב, מהווים בסיס להוראה ולהבנת התכנים שבפרק.
הסיבות לכך הן:

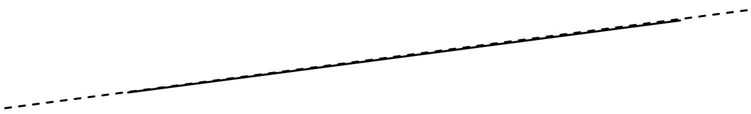
א. לא כולם ניחנו בראייה מרחבית, והיא אינה אינטואיטיבית כלל, לכן חשוב לבסס את הידע על הגדרות ועל עובדות מוצקות.

ב. אמנם בבית-הספר היסודי התלמידים נחשפו להגדרה ולזיהוי של כמה גופים, אך הם לא מכירים את תכונותיהם.

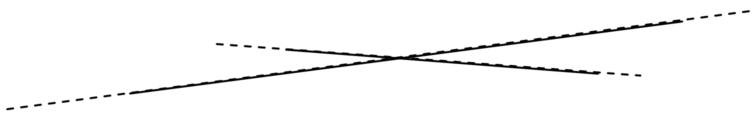
ג. הפרק נלמד במסגרת הגאומטריה הדדוקטיבית. אותן הגדרות ותכונות הן בסיס למספר רב של הוכחות.

עם זאת נסינו לצמצם ככל האפשר את מספר המושגים, ההגדרות והתכונות הנדרשות להוראת הנושאים שבתכנית הלימודים.

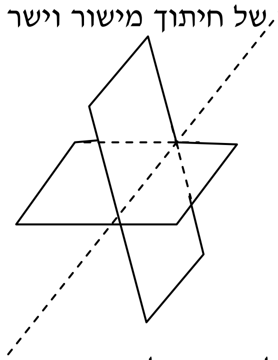
מישור הוא מושג ראשוני יחד עם נקודה וישר. קל לייצג את שני המושגים האחרונים שנתפסים בצורה אינטואיטיבית, גם אם אין להם הגדרה.
דוגמאות:
ישר וייצוג האופי האין –סופי שלו.

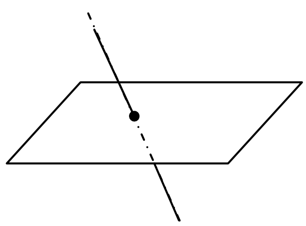


ייצוג חיתוך ישרים



לעומת זאת ייצוג של מישור והאופי האין –סופי שלו, של חיתוך מישורים או של חיתוך מישור וישר הם הרבה פחות אינטואיטיביים.





<u>הערה</u>: ברוב ההגדרות מתייחסים לישרים ולא לקטעים, אך הפירוט "הישר שעליו נשען כל קטע" היה הופך את הטקסטים לבלתי קריאים, לכן הרשינו לעצמנו "גלישה דידקטית" זאת.

הקשיים בהוראת והבנת הנושא מצויים בכמה רבדים.

- <u>ראיה מרחבית</u>

כאמור אין לכל התלמידים ראייה מרחבית, ופיתוח חוש זה הוא אחד מהאתגרים של הוראת הנושא.
הדבר נעשה על-ידי:

- המחשות רבות ככל האפשר של הגופים על-ידי גופים שונים, גופים חלולים, קשיות מחוברות בפלסטלינה או בחתיכות מחק, גופים מחיי היום-יום.
  ההמחשות נעשות למרות האופי הדדוקטיבי של ההסברים ושל השאלות.
- שאלות פשוטות לכאורה המבקשות לתאר את המצב ההדדי של ישרים, של ישרים ומישורים ושל מישורים ומישורים.
- זיהוי פריסות המתאימות לגוף מהווה גם קושי, אך גם כלי עזר לחישובים.
- זיהוי מישור על-ידי שלוש או ארבע נקודות הנמצאות בו, שמהווה גם קושי וגם עזר לניתוח סרטוטים.

יז. גיאומטריה במרחב

- <u>הגדרות ותכונות</u>
- אחד מהקשיים ברובד זה הוא ההבנה שעל-אף שלמישור אין הגדרה פורמלית, אפשר "לקבוע" מישור על-ידי שני ישרים מקבילים או על-ידי שני ישרים נחתכים, הקובעים מישור אחד ויחיד.
קביעת מישור על-ידי ישרים מובילה לעוד קושי, הפעם במצב ההדדי של שני ישרים.
קיימות שלוש אפשרויות להדדיות של ישרים: א) הישרים מקבילים; ב) הישרים נחתכים; ג) הישרים מצטלבים, כלומר הישרים אינם מקבילים ואינם נחתכים, כי הם לא באותו מישור. בשני המצבים הראשונים הישרים בהכרח באותו מישור, כי הם קובעים מישור! את המצב השלישי קשה לתלמידים לדמיין. אפשר לעזור להם להבין מצב זה של ישרים על-ידי סרטוט ישר על רצפת הכיתה שאינו מקביל לנורת הניאון (פלואורסצנט) שעל התקרה (אם יש). שני ה"ישרים" מצטלבים.
המונח המתמטי "מצטלבים" עלול לבלבל את התלמידים, כיוון שמשמעותו בעברית היא "נחתכים" בעוד שלמעשה משמעותו המתמטית היא שהישרים אינם באותו מישור.
- ההבנה שחוקים במרחב הם הכללה של חוקים במישור אינה דבר פשוט, לכן תלמידים מתקשים להעביר את הידע שהם רכשו בלימוד גיאומטריה במישור להוכחות ולחישובים במרחב.
- קושי נוסף הוא הבנת המשפט הבסיסי "אם במרחב ישר מאונך בנקודה A לשני ישרים במישור שנחתכים בנקודה A, הוא מאונך לכל ישר במישור, העובר דרך הנקודה A." במקרה זה, המחשה (ספר עומד פתוח, דלת מסתובבת) יעילה יותר מאלף מילים.

- <u>מיומנויות סרטוט</u>

קריאת סרטוטים בשלב ראשון וביצוע סרטוטים בשלב שני קשורים לראייה מרחבית, לכן אפשר לפתח מיומנויות אלה על-ידי:
- פירוק צורה מרחבית לצורות מישוריות לצורך פישוט בעיה וחישובים;
- לימוד הסכמי סרטוט המאפשרים לפרש סרטוט דו-מימדי במרחב.

- <u>מיומנויות חישוב</u>

בשלב זה של ההוראה, רוב החישובים במרחב קשורים למשפט פיתגורס, כלומר לשימוש בחזקת 2 ובשורשים, לכן חשוב שלתלמידים תהיה שליטה מלאה במשפט פיתגורס.

לאור כל הקשים האלה נזכיר שוב את חשיבות אמצעי המחשה.

מונחים

כל המונחים הם במרחב.
מרחב , דו- ממדי, תלת- ממדי, ישר, מישור, מישורים מקבילים, ישר מאונך למישור, ישרים מקבילים, ישרים מאונכים, ישרים מצטלבים, תיבה, אלכסון התיבה, הקובייה, פאון, מנסרה, נפח מנסרה, פירמידה, גובה הפירמידה, שטח פנים.

אמצעי המחשה

גופים שונים, גופים חלולים, קשיות מחוברות על-ידי פלסטלינה או על-ידי חתיכות מחק, גופים מחיי היום-יום, פריסות בריסטול.

מטרות

התלמידים ידעו:
א. לזהות ישרים מקבילים במרחב;
ב. לזהות ישרים מאונכים במרחב;
ג. לזהות מישור וישר מקבילים במרחב;
ד. לזהות מישור וישר מאונכים במרחב;
ה. לזהות שגוף הוא תיבה;
ו. לזהות את אלכסוני פאות התיבה ואת שמם בסרטוט נתון;

ז. לזהות את אלכסוני התיבה ואת שמם בסרטוט נתון ;
ח. להשתמש במשפט פיתגורס לחישובי אורכים בתיבה ;
ט. לזהות שגוף הוא מנסרה ;
י. לזהות את הבסיסים של מנסרה ;
יא. להבחין בין מנסרות ישרות לבין מנסרות לא ישרות ;
יב. להתאים פריסה למנסרה ;
יג. לחשב שטח פנים של מנסרה ישרה ;
יד. לחשב נפח של מנסרה ישרה ;
טו. לזהות שגוף הוא פירמידה ;
טז. להשתמש במשפט פיתגורס לחישובי אורכים בפירמידה.

השיעור בספר הלימוד

מגלים ולומדים, עמ' 410

כאמור שני השיעורים הראשונים מוקדשים לאוצר המילים, להגדרות ולתכונות של הגיאומטריה במרחב. אין בשיעורים האלה הוכחות. יש להניח שהתלמידים ישתמשו באוצר המילים המובא בשיעורים בתרגול, לכן בשלב זה של ההוראה חשוב לוודא שהתלמידים יעשו את הקשר בין מונח לבין ייצוגו בסרטוט או בגוף.

א. <u>מבוא לגיאומטריה במרחב: ישרים ומישורים</u>, עמ' 410

<u>מגלים</u>

1. מטרת הפעילות היא להעלות למודעות את ההבדל בין העתקות (טרנספורמציות) במישור והעתקות במרחב.
כדי שכפות הידיים יהיו חופפות צריך "לצאת" מהמישור ולעבור במרחב.
2. התלמידים כבר מכירים את התיבה מבית-הספר יסודי ומכיתה ז'. מטרת הסעיפים א-ה' היא לבסס את הידע הקודם. מטרת הסעיפים הבאים היא לחשוף את התלמידים לאוצר המילים של המרחב על-ידי הסתכלות בסרטוט או בגוף תלת-ממדי, לכן לפני סעיף ו' נתונה דוגמה של מקבילות של ישר ומישור.

<u>לומדים</u>

לאחר ההבהרה החשובה, שכל מה שנכון במישור נכון גם במרחב, השיעור כולו מוקדש לאוצר הגדרות וקשרים בין ישרים ומישורים במרחב.
- מקבילות ישרים ;
- חיתוך ישרים ;
- מקבילות ישרים ;
- מקבילות ישר ומישור ;
- ישרים מצטלבים.

יש לציין שבניגוד למצב ההדדי בין ישרים שלו יש שלוש אפשרויות, קיימות רק שתי אפשרויות למצב הדדי של מישור וישר - או שהם מקבילים או שהם נחתכים.

<u>מתרגלים</u>

אפשר להיעזר בדגמים של גופים או לבנות מקשיות או מפלסטלינה וכדומה דגמים של משקפים. כך אפשר לעזור בהמחשה ובזיהוי של הישרים והמישורים.

4. בשאלה זו מזהים מצב הדדי של ישרים ומישורים.
א) כל הישרים במישור הפאה ABCD מקבילים לפאה A1B1C1D1. דוגמה: AB, AD, BC, BD,AC,CD.
ב) המקצועות AB,CD, A1B1 ; D1C1. אלכסוני הפאות AA1B1B, DD1C1C ; אלכסוני הקובייה.
ג) אלכסוני הפאה A1C1, B1D1.

5. הישרים לא בהכרֵח נחתכים.

6. יציבות המשולש לעומת הצורות האחרות. אפשר להדגים זאת בעזרת שלושה קטעים באורך נתון, היוצרים משולש אחד בלבד, המשולש "קשיח", אי-אפשר להזיז את צלעותיו ולקבל משולש אחר.

מארבעה קטעים או יותר אפשר ליצור מצולעים שונים וכן אפשר להזיז את צלעותיהם. הם אינם "קשיחים".

לומדים, עמ' 415

הדרכים השונות לקביעת מישור המתוארות בקטע מיועדות בעיקר להגברת כישורי ראייה מרחבית.

בדרך-כלל שם של מישור נתון בעזרת אות אחת, כגון המישור P המכיל את הישרים __ ו__, אך מתן שם על-ידי 3 ואפילו 4 אותיות (למרות האות המיותרת שבשם כזה) מאפשר לתלמידים "לראות" טוב יותר את המישור.

מתרגלים

בתרגילים **7 – 9** מזהים ישרים ומישורים מקבילים ונחתכים.

7. א) הישרים נחתכים במישור ABCD. ב) הישרים מקבילים במישור ABCD. ג-ד) הישרים אינם באותו מישור.

8. א) הישר והמישור נחתכים בנקודה B. (הנקודה B נמצאת במישור של ADC.) ב) הישר והמישור מקבילים. ג) הישר והמישור נחתכים בנקודה B1. (הנקודה B1 נמצאת במישור של BCC1.)

9. א) המישורים מקבילים. ב) המישורים נחתכים. (הישר AD משותף לשני המישורים.) ג) המישורים נחתכים. (הישר BC משותף לשני המישורים.)

11. משימה זו ממחישה את המונחים שהובאו בפעילות ב'. סעיף ד' מהווה הכנה להגדרת מקבילות של שני ישרים במרחב (מאונכים לאותו מישור).

12. א) כן. הישר נמצא במישור המקביל למישור הנתון. ב) כן. הישר חותך את המישור. (דוגמה אפשר לראות בתרגיל 2. אפשר לראות גם שאלכסוני הקובייה חותכים את פאות הקובייה.) ג) לא. אם לישר יש שתי נקודות משותפות עם המישור, כל הישר נמצא במישור, ולכן יש לו אין-סוף נקודות משותפות עם המישור.

13. א) כן. הישרים מקבילים. ב) כן. הישרים נחתכים. ג) לא. דרך שתי נקודות במישור עובר ישר יחיד, ולכן הישרים מתלכדים.

14. א) כן. הישרים נמצאים במישורים מקבילים. ב) כן. הישרים נמצאים במישורים נחתכים. ג) לא. דרך שתי נקודות עובר ישר יחיד, ולכן הישרים מתלכדים.

10. א) כן. המישורים מקבילים. ב-ג) לא. כאשר שני מישורים נחתכים, יש להם ישר משותף, כלומר אין-סוף נקודות.

15. א) כן. המישורים מקבילים. ב) כן. לשני מישורים נחתכים יש ישר משותף (ישר החיתוך). ג) לא. שני ישרים קובעים מישור. אם יש שני ישרים משותפים, המישורים מתלכדים.

16. א) הנמלה יכולה לנוע ימינה ושמאלה לאורך הישר. ב) הזבוב יכול לנוע ימינה, שמאלה, למעלה ולמטה לאורך קווי הרשת. ג) החיידק יכול לנוע כמו הזבוב במישור הפאה, ימינה שמאלה, למעלה ולמטה. כמו-כן יכול החיידק לעבור מפאה לפאה.

ב. מאונכות במרחב, עמ' 417

מגלים

1. מטרת הפעילות היא להוביל לזיהוי מצבי מאונכות בתיבה. למרות שבשיעורים הבאים נרחיב את השימוש במצבי מאונכות למנסרה ולפירמידה, הכרת מצבים האלה בתיבה קלה יותר, כי אין הפרעות הנובעות מצורות רבות של מנסרות או של פירמידות.
2. הקושי בפעילות הוא בהבנת הסרטוט. התלמידים עוד לא רגילים לניתוח סרטוט שבו מופיעים קטעים "נסתרים". בנוסף, הישר d המסורטט כאן, חותך שני מישורים.

בשלב זה מציגים את המאונכות על-ידי דוגמאות ולא על-ידי מדידת זוויות כמו במישור, כי הוראת מושג הזווית במרחב א) אינה בתכנית הלימודים ב) דורשת ידע, ראייה מרחבית ומיומנויות ברמה הרבה יותר גבוהה מהרמה שיש בדרך כלל לתלמידים בכיתה ח'.

א. מהנתונים: A_1C_1 אינו מאונך ל- AA_1D_1D והמישור AA_1D_1D מקביל למישור BB_1C_1C. התלמידים יכולים להסיק שA_1C_1 אינו מאונך ל- BB_1C_1C.

ב. התלמידים רואים בצורה אינטואיטיבית שהישר d מקביל ל- ABCD.

3. פעילות זו חשובה מאוד להבנת ההגדרה של ישר מאונך למישור וקלה לביצוע. אפשר גם להשתמש בספר פתוח העומד על השולחן.

יז. גיאומטריה במרחב

לומדים

בשיעור צמצמנו את השימוש בסימון של מאונכות למצבים שקל לנתח. כאמור הקושי הגדול בשיעור הוא הבנת המשפט המרכזי של השיעור – "אם במרחב ישר מאונך בנקודה A לשני ישרים נחתכים בנקודה A, הוא מאונך לכל ישר במישור העובר דרך A". ביצוע פעילויות הגילוי יקל על הבנת המשפט.
שני המשפטים האחרונים, על ישרים מקבילים ומישורים מקבילים, מרחיבים את ההגדרה האופרטיבית של המקבילות שהתלמידים ראו בכיתה ז' למרחב.

מתרגלים

17. א) לכל פאה מאונכים ארבעה מקצועות. ב) לכל מקצוע מאונכות שתי פאות. ג) כל מקצוע מאונך לארבעה מקצועות.

18. א) קו הקיפול הוא הישר המשותף לכל הדפים. ב) לכל דף יש ישר משותף עם מישור השולחן, הצלע התחתונה של הדף.

19. א) לא. (הישר חותך את המישור בזווית חדה.) ב) לא. הישר מקביל למישור. ג) כן.

20. א-ב) מידת הזווית 90°. המקצוע AA1 מאונך למקצועות AB ו- AD. ג) המקצוע A1A מאונך לשני ישרים במישור ABCD (AB, AD), ולכן הוא מאונך למישור כולו. ד) 90°. המקצוע A1A מאונך למישור ABCD, ולכן הוא מאונך לכל הישרים במישור, העוברים דרך נקודה A. הישר AC הוא אחד מהם. ה) משולש ישר-זווית. (לפי סעיף ד').

21. כן. אפשר להסתכל על המקצועות השונים בתיבה.

22. הישרים מאונכים לישר d. מאחר שהישר d מאונך למישור,כל הישרים העוברים במישור דרך נקודת החיתוך של הישר d עם המישור, מאונכים לישר d.

24. כל הישרים במישור PORT העוברים בנקודה P מאונכים לישר SP. דוגמה: PO, PT, PR.

25. המקצועות DC, D1C1, BC, B1C1. האלכסונים AC, A1C1.

26. כן. הישר m מאונך למישור המוגדר על-ידי הישרים d ו-s . ישר המאונך לשני ישרים במישור, מאונך למישור כולו.
הישר m מאונך לישר d (הישר d מאונך למישור שהישר m נמצא בו), וכן לישר s (לפי הנתון).

ג. <u>אלכסונים בתיבה</u>, עמ' 422

מגלים

1. מטרות הפעילות הן:
- לעודד התבוננות בקשרים בין קדקודי התיבה בנקודת מבט של שייכות לאותה פאה או לא. נציין כי בסעיף ב' - מציאת זוגות של קדקודים שאינם שייכים לאותה פאה, יש רק שלושה זוגות אפשריים: BD_1, B_1D ו- AC_1.
- להוות הכנה להגדרה של אלכסון התיבה.
2. יישום המשפט שנלמד קודם: "ישר המאונך למישור בנקודה A מאונך לכל ישר במישור העובר דרך A."
3. עוברים לתחום המדידות והחישובים: משתמשים פעמיים במשפט פיתגורס.
סעיף ג' הוא יישום של הסעיפים א' ו-ב', בלי צורך בחישוב נוסף. מספיק להשתמש בשוויון אורכי האלכסונים של המלבן.

לומדים

בשיעור מוכיחים את השוויון של אורכי האלכסונים של תיבה. מובן שלאחר פעילויות הגילוי אין צורך בקריאת השיעור במלואו. על המורה להכליל את החישוב שנעשה בפעילות השלישית. הרבה יותר חשוב לבצע לפחות שתיים מהמשימות 32 - 36 במליאה.

מתרגלים

27. א) JL, EM, RS, UA. ב) הקטעים הם אלכסוני פאות. הם מחברים שני קדקודים הנמצאים על אותה פאה. אלכסוני תיבה מחברים קדקודים שאינם על אותה פאה.

28. בכל תיבה יש להסתכל על ישרים המחברים קדקודים שאינם על אותה פאה.

31. המשולש ABD הוא משולש ישר-זווית ,לכן אפשר לחשב את אורך אלכסון הפאה,BD, בעזרת משפט פיתגורס. $a^2+b^2=BD^2$. המשולש BDD1 הוא משולש ישר-זווית, ולכן אפשר לחשב את אורך אלכסון

התיבה, BD1, בעזרת משפט פיתגורס. $c^2+BD^2=BD1^2$. נציב במקום BD^2 את הביטוי a^2+b^2 ונקבל:
$BD1^2=a^2+b^2+c^2$. יש להוציא שורש ריבועי משני האגפים, נקבל: $BD_1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

32. אורך האלכסון הוא השורש הריבועי של $5^2+12^2+84^2=7225$. $\sqrt{7225}=85$. אורך האלכסון 85 ס״מ.

33. א) $AC^2=3^2+7^2=58$. $AC=\sqrt{58}=7.615$. ב) $AG^2=AC^2+5^2=83$. $AG=\sqrt{83}=9.11$.

34. $NT^2=15^2+26.4^2+8^2=985.96$. $NT=\sqrt{985.98}=31.4$.

35. $FR^2=6^2+8^2=100$. $FR=\sqrt{100}=10$. אורך אלכסון התיבה הוא 10 ס״מ.

36. אורך האלכסון 17 ס״מ. ($8^2+9^2+12^2=289$ $\sqrt{289}=17$).

37. אי-אפשר להכניס את הסרגל. נחשב את אורך אלכסון התיבה. נקבל 19.5 ס״מ
($18^2+6^2+4.5^2=729$, $\sqrt{729}=19.5$). הסרגל ארוך יותר מאלכסון התיבה.

38. 29 ס״מ.

39. א) צלעות המשולש הם המקצוע OX, אלכסון הפאה TX ואלכסון התיבה TO. המקצוע מאונך לפאה ולכן גם לאלכסון הפאה. לכן המשולש הוא ישר-זווית, והזווית הישרה היא ליד הקדקוד X ($\angle TXO$). ב) $OX^2+99^2=101^2$. $OX^2=400$. $OX=20$. אורך המקצוע 20 ס״מ.

40. א) צלעות המשולש הם המקצוע VI, אלכסון הפאה VS ואלכסון התיבה IS. המקצוע מאונך לפאה ולכן גם לאלכסון הפאה. לכן המשולש הוא ישר-זווית, והזווית הישרה היא ליד הקדקוד V. ($\angle IVS$).
ב) $VS^2+8^2=17^2$. $VS^2=225$. $VS=15$. אורך אלכסון התיבה 15 ס״מ.

ד. <u>מנסרות</u>, עמ׳ 427

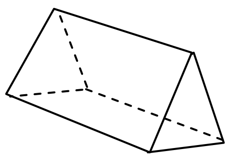
בפעילויות הגילוי ובשיעור מופיעים שני ההיבטים של הגאומטריה: חקר הצורות ומדידות (נפח ושטח המעטפת). המורה יכול לבחור ללמד אותם ביחד או בנפרד. הם מוצגים ביחד על מנת לאפשר את הבחירה.

<u>מגלים</u>

1. בפעילות זו ישנה חזרה על פעילות מיון גופים שהתלמידים ביצעו בכיתה ו׳ (אם נושא הגופים נלמד), אך יש להניח שהם שכחו אותה.
עודדו את התלמידים לומר את קריטריון המיון שלהם ולהצדיק את המיון.
קריטריונים אפשריים הם נטוי/לא נטוי, מספר צלעות הבסיס, עומד/שוכב.
2. מטרת הפעילות היא להצדיק את נוסחת נפח המנסרה (מכפלת שטח הבסיס בגובה המנסרה).
בשלב זה אפשר לחשב את נפח המנסרה על-ידי ספירת הקוביות וחצאי קוביות היחידה.
3. חיפוש נוסחת נפח מנסרה משולשת כיישום של הפעולה הקודמת.

<u>לומדים</u>

בחלק הראשון של השיעור חוזרים על הגדרת מנסרה, זיהויה ומונחים הקשורים אליה. יהיו תלמידים שלא יראו את המנסרה המשולשת כמנסרה, אלא כפירמידה, כי היא אינה עומדת על בסיסה.



בדיקת תנאי ההגדרה מאפשרת לזהות גוף.
במקרה של מנסרה: שני בסיסים מקבילים וחופפים ומעטפת מורכבת ממקביליות.
בסוף קטע השיעור מסכמים כיצד לחשב נפח של מנסרה.

<u>מתרגלים</u>

41. א) לא פאונים: ב׳, ה׳, ח׳, י״א, ט״ו. הגופים אינם בנויים ממצולעים. כל היתר הם פאונים.
ב) מנסרה היא פאון כיוון שכל פאותיה הם מצולעים. ג) ג׳, ד׳, ז׳, י״ב, י״ד, ט״ז, י״ז, י״ח, י״ט, כ׳.
חלק מהמנסרות הן מנסרות ישרות (ג׳, ד׳, ז׳, י״ב, י״ד, י״ז, י״ח, י״ט).

42. התלמידים מתבקשים למצוא קשר בין מספר הצלעות של בסיס המנסרה, מספר הפאות, מספר המקצועות ומספר הקדקודים. הם בודקים זאת בעזרת מספר מנסרות שבסיסן שונה. נסמן את מספר הצלעות של בסיס המנסרה ב-n. המסקנה המתקבלת היא שמספר הקדקודים הוא 2n, (n קדקודים של כל בסיס). מספר המקצועות הוא 3n, (n מקצועות של כל אחד מהבסיסים + n מקצועות של

המעטפת). מספר הפאות של המעטפת n (פאה אחת לכל מקצוע של הבסיס). מספר הפאות הכולל (מעטפת + בסיסים) הוא n+2.

43. א) כן. כל מצולע יכול להיות בסיס של מנסרה. ב) לא. מספר הקדקודים צריך להיות זוגי.(מספר הקדקודים הוא 2n, כאשר n הוא מספר הצלעות של בסיס המנסרה.) ג) כן. (מספר המקצועות הוא 3n, כאשר n הוא מספר הצלעות של בסיס המנסרה.) זו מנסרה שבסיסה מרובע. ד) לא. מספר המקצועות צריך להתחלק ב-3 (סעיף ג'). ה) כן. מנסרה שבסיסה מתומן. (מספר הפאות הכולל הוא n+2, כאשר n הוא מספר הצלעות של בסיס המנסרה.)

לומדים, עמ' 431
קטע זה מוקדש לחישוב שטח מעטפת של מנסרה.
הצגת פריסה של מנסרה מאפשרת להעביר את חישובי השטחים מתלת-מימד לדו-מימד, ובכך היא מצמצמת את משקל הראייה המרחבית.

מתרגלים

44. א) נפח מנסרה הוא מכפלת שטח הבסיס בגובה, לכן נפח המנסרה הוא 300 סמ"ק. ($30\cdot10=300$).
ב) שטח המעטפת הוא שטח הפאות, ללא הבסיסים. יש 5 פאות, אחת לכל צלע של הבסיס. כל פאה היא מלבן שמידות צלעותיו הן 3 ס"מ ו-10 ס"מ. שטח כל פאה 30 סמ"ר. שטח המעטפת 150 סמ"ר ($30\cdot5=150$).

45. המנסרה ישרה. כל הפאות הן מלבנים. בסיס המנסרה הוא מלבן.

46. המנסרה אינה ישרה כיוון שפאותיה הן מקביליות.

47. א) הבסיס הוא טרפז שווה-שוקיים. נעביר שני גבהים מקצוות הבסיס הקטן לבסיס הגדול. מתקבל גם מלבן ושני משולשים ישרי-זווית חופפים. אורכי צלעות המלבן הם 4 ס"מ, לפי הבסיס הקטן, ו-h לפי גובה הטרפז. ניצבי כל אחד מהמשולשים הם h, גובה המנסרה, ו-3 ס"מ (מחצית ההפרש בין הבסיסים). אורך היתר הוא 5 ס"מ, והוא שוק הטרפז. לחישוב הגובה ניעזר במשפט פיתגורס.
$3^2+h^2=5^2 \Leftarrow h=4$. גובה הטרפז 4 ס"מ. שטח הטרפז הוא מחצית ממכפלת סכום הבסיסים בגובה.
$28=\frac{(10+4)\cdot4}{2}$. שטח הטרפז 28 סמ"ר. נפח המנסרה הוא שטח הבסיס כפול גובה המנסרה:
$28\cdot12=336$. הנפח 336 סמ"ק. ב) שטח המעטפת הוא שטח הפאות. יש ארבע פאות, כולן מלבנים. אורך כל מלבן 12 ס"מ (גובה המנסרה),אורך הצלע השנייה של שני המלבנים הבנויים על שוקי הטרפז הוא 5 ס"מ, שטח כל מלבן הוא 60 סמ"ר (5*120). אורך הצלע האחרת של המלבן הבנוי על הבסיס הגדול של הטרפז הוא 10 ס"מ. שטח מלבן זה הוא 120 סמ"ר. אורך הצלע האחרת של המלבן הבנוי על הבסיס הקטן של הטרפז הוא 4 ס"מ, שטח מלבן זה הוא 48 סמ"ר. שטח המעטפת הוא 288 סמ"ר (60+60+120+48).

48. א) שטח הבסיס הוא $45=\frac{(18+12)\cdot3}{2}$. 45 סמ"ר. ב) נפח המנסרה הוא $45\cdot25=1125$. 1125 סמ"ק.

49. א) יש למצוא תחילה את שטח הבסיס שהוא משולש שווה-שוקיים. הגובה במשולש שווה-שוקיים הוא גם תיכון לבסיס. הוא מחלק את המשולש שווה-השוקיים לשני משולשים ישרי-זווית חופפים. אורך ניצב אחד במשולש הוא 4 ס"מ (מחצית הבסיס), ניצב אחד הוא גובה המשולש h, ואורך היתר הוא 5 ס"מ . בעזרת משפט פיתגורס נחשב את הגובה. $4^2+h^2=5^2 \Leftarrow h=3$. שטח המשולש הוא $12=\frac{8\cdot3}{2}$. 12 סמ"ר. נפח המנסרה הוא 72 סמ"ק ($12\cdot6=72$). ב)שטח המעטפת הוא שטח הפאות. הפאות הן מלבנים. אורך כל מלבן הוא גובה המנסרה,כלומר 6 ס"מ. שני מלבנים הם על שוקי משולש הבסיס, ומלבן אחד על בסיס המשולש. $8\cdot6+2\cdot5\cdot6=108$. שטח המעטפת 108 סמ"ר.

50. א) שטח הבסיס הוא $48=\frac{8\cdot12}{2}$. נפח המנסרה הוא 720 סמ"ק ($48\cdot15=720$). ב) במעטפת שלושה מלבנים שאורכם 15 ס"מ, (גובה המנסרה). מלבן על כל ניצב ומלבן נוסף על היתר. כדי למצוא את אורך היתר ניעזר במשפט פיתגורס. $8^2+12^2=208$. אורך היתר הוא $14.42=\sqrt{208}$. שטח המעטפת הוא $516.33=\sqrt{208}\cdot15+8\cdot15+12\cdot15$.

51. א) שטח הבסיס הוא $6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$. נפח המנסרה הוא 54 סמ"ק (6·9=54). ב) אי-אפשר לחשב את שטח המעטפת. לא ידוע אורכן של שתיים מצלעות המשולש, ואין מספיק נתונים כדי לחשב אותן. ולכן אי-אפשר לחשב את שטח הפאות. אפשר לשאול את התלמידים אם אפשר לחשב את שטח המעטפת אם ידוע שבסיס המנסרה הוא משולש שווה-שוקיים. במקרה זה אפשר לחשב את אורך שוקי המשולש בעזרת משפט פיתגורס.

52. במנסרות ישרות הפאות הן מלבנים, במנסרות שאינן ישרות הפאות מקביליות. המנסרות הישרות הן א',ב', ד', ה'.

53. יש לשים לב לאורך הצלעות ומספר המלבנים. אפשר להציע לתלמידים לסרטט ולגזור את הפריסות. הפריסות המתאימות למנסרה הן ג', ד', ח', י'.

ה. <u>פירמידה: סרטוט ופריסה</u>, עמ' 436

הוראת הפירמידה מחולקת לשני שיעורים. הראשון מטפל בהיבטים החזותיים של הפירמידה, והשני מטפל בהיבט החישובי שלה.

<u>מגלים</u>

חשוב שיעמדו לרשות התלמידים גופים שונים, על מנת לחקור את ההבדלים ביניהם. לכן פעילויות הגילוי מבוססות על אמצעי המחשה. הסרטוטים שבנספח הם חלק אינטגראלי של השיעור.

1. כמו בפעילות הגילוי של המנסרה, גם כאן חוזרים על הפעילות של מיון גופים שהתלמידים ביצעו בכיתה ו', הפעם על מנת לאפיין ולתאר פירמידות. עודדו את התלמידים לומר את קריטריון המיון שלהם ולהצדיק את המיון.
2. לסרטוט פריסת הפירמידה שתי מטרות.
הראשונה היא לעזור בזיהוי פירמידה (פאות המעטפת הם משולשים) ובכך למנוע את הטעות שציינו בשיעור הקודם. השנייה היא הכנה לחישובים שיילמדו בשיעור ו'.

<u>לומדים</u>

השיעור נראה ארוך, אך לאחר הגדרת הפירמידה, הוא כולו מורכב מסרטוטים ומהסברים על דרכי סרטוט של פירמידה. תרגיל נוסף אפשרי בנושא הוא לבקש מהתלמידים לסרטט פירמידות משולשות או מרובעות, בכיתה או בבית – ראו "מיומנויות", עמוד 447.

<u>מתרגלים</u>

54. א) הפירמידה אינה ישרה. בפירמידה ישרה מקצועות המעטפת צריכים להיות שווים באורכם. ג) הפירמידה ישרה. הפאות הן משולשים חופפים, כלומר המקצועות שווים באורכם. ד) הפירמידה ישרה. המקצועות שווים באורכם. ה) הפירמידה לא בהכרֵח ישרה. היא יכולה להיות ישרה אם משולשי המעטפת יהיו חופפים. ו) הפירמידה ישרה. אם המשולשים שווי-שוקיים, המקצועות שווים באורכם.

55. השם נקבע לפי מצולע הבסיס. א) פירמידה מרובעת. ב) פירמידה מחומשת. ג) פירמידה משושה. ד) פירמידה משובעת. ה) פירמידה מתומנת.

56. א) פירמידה משוכללת. היא לא בהכרח ישרה. ב) פירמידה משושה משוכללת וישרה.

57. א) פירמידה מרובעת משוכללת. ב) פאון הוא גוף הבנוי ממצולעים. במקרה זה המצולעים הם ריבוע ומשולשים. ג) לפאון חמש פאות (ארבעה משולשים+ריבוע). ד) חמש קדקודים. וארבעה קודקודי הריבוע וקדקוד נוסף שכל המשולשים מתחברים בו. ה) 8 מקצועות: ארבעה לבסיס ועוד ארבעה למשולשים היוצרים את המעטפת.

58. א) הבסיס הוא משולש. ב) פירמידה משולשת. ג) הפירמידה משוכללת וישרה. כל המשולשים חופפים, וצלעותיהם שוות באורכן. ד) 4 פאות. ה) 4 קדקודים. ו) 6 מקצועות. ז) כל אחד מהקדקודים יכול להיות ראש הפירמידה. מאחר שכל המשולשים חופפים, כל משולש יכול להיות הבסיס.

59. א) מעטפת בפירמידה בנויה ממשולשים. ב) בסיס הפירמידה הוא משושה. ג) 8 פאות שהן משולשים. הבסיס הוא מתומן. ד) ארבע פאות שהן משולשים. וחמישה קדקודים.

60. מעטפת הפירמידה בנויה תמיד ממשולשים, לכן כאשר יש מצולע שאינו משולש, הוא בסיס הפירמידה. גם הבסיס יכול להיות משולש (פירמידה א'). אם n הוא מספר הצלעות של בסיס הפירמידה, מספר הקדקודים הוא n+1, מספר המקצועות הוא 2n, ומספר הפאות הוא n. (בפירמידה משולשת כל משולש יכול להיות הבסיס.)

.62 יש להתאים את מספר המשולשים למספר צלעות הבסיס, וכן להתאים את הצלעות. הפריסות המתאימות לפירמידה הן א', ד', ו', ז'.

.63 א) כן. לאותו בסיס יכולה להיות פירמידה ישרה ופירמידה שאינה ישרה. ב) כן. הבסיס יכול להיות שונה. ג) הפירמידות זהות. ד) כן. הבסיס הוא מצולע משוכלל, ולכן הפירמידה משוכללת.

.64 כן. הארבעון הוא פירמידה שבסיסה משולש שווה-צלעות, וכל פאותיה הן משולשים שווי-צלעות. כל אחת מהפאות יכולה להיות הבסיס של הארבעון (טטראדר בלעז).

ו. <u>פירמידה: גובה ושטח פנים</u>, עמוד 441

כאמור השיעור מוקדש לחישובים בפירמידה, חישובי אורכי קטעים וחישוב שטח הפנים לפי תכנית הלימודים.

<u>**מגלים**</u>

מטרת הפעילות היא ללמד את התלמידים "לפרק" את הפירמידה למישורים מתאימים לחישובים המבוקשים, וזאת בשני שלבים: הראשון זיהוי המישור המתאים, והשני סרטוט צורה דו-ממדית המתאימה לשאלה. פעולה זו מצמצמת את ההשפעה של חוסר ראייה מרחבית בכך שהיא מעבירה את השאלות הנשאלות במרחב לשאלות במישור.

<u>**לומדים**</u>

השיעור מתמקד בניתוח המרכיבים של פירמידה ישרה, בסיס, פאות (משולשים שווה שוקיים, גובה) והקשרים ביניהם. הניתוח נעשה על-ידי סרטוט מישורים חשובים (לחישובים): פאות, בסיס ובעיקר מישורים ש"לא רואים", הנקבעים על-ידי אלכסון הבסיס וגובה הפירמידה.
שיעור זה מפתח מיומנות פתרון שאלות יותר משהוא מקנה ידע.

<u>**מתרגלים**</u>

.65 א) מאחר שהפירמידה ישרה, משולשי המעטפת הם משולשים שווי-שוקיים. ב) הבסיס הוא ריבוע. ג) לפירמידה ארבע פאות. ד) שטח הפנים הוא שטח כל הפאות + שטח הבסיס. שטח כל משולש הוא $\frac{16\cdot 10}{2}=80$. שטח הבסיס הוא $16\cdot 16=256$. שטח הפנים הוא $4\cdot 80+256=576$. 576 סמ"ר.

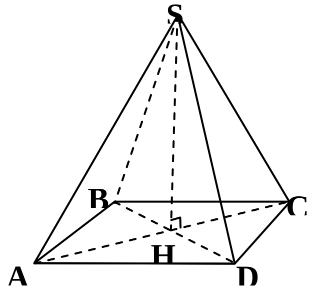
.66 כדי לחשב את שטחי המשולשים יש למצוא תחילה את הגבהים שלהם. שטח הפנים הוא שטח הבסיס (משולש שווה-צלעות) +שטחי שלוש הפאות (משולשים שווי-שוקיים). את הגבהים אפשר לחשב בעזרת משפט פיתגורס. הגובה במשולש שווה-שוקיים ושווה צלעות חוצה את הבסיס. משולש ABC:
$h^2+3^2=6^2 \Leftarrow h=\sqrt{27}=5.2$. שטח המשולש הוא $\frac{6\cdot\sqrt{27}}{2}=15.59$. משולש SAB: $h^2+3^2=5^2$
$\Leftarrow h=4$. שטח המשולש הוא $\frac{6\cdot 4}{2}=12$. שטח הפנים: $15.59+3\cdot 12=51.59$. שטח הפנים הוא 51.59 סמ"ר.

.67 מאחר ש-AD הוא הגובה של הפירמידה, המשולשים DAB ו- DAC הם משולשים ישרי-זווית. נחשב את BD בעזרת משפט פיתגורס. $5^2+4.8^2=BD^2 \Leftarrow BD=\sqrt{48.04}=6.93$. $BD=6.93$ ס"מ. DC הוא היתר במשולש ישר-הזווית ADC. כדי למצוא אותו יש לחשב תחילה את הניצב AC. המשולש ABC הוא משולש ישר-זווית שבו AC הוא היתר נחשב בעזרת משפט פיתגורס כך $4.8^2+3.6^2=AC^2$
$\Leftarrow AC=\sqrt{36}=6$. $5^2+6^2=DC^2 \Leftarrow DC=\sqrt{61}=7.81$. $DC=7.81$ ס"מ.

.68 א) המשולש הוא שווה-שוקיים. בפירמידה ישרה מקצועות הפאות שווים באורכם. ב) משולש SAC הוא משולש שווה-שוקיים. במשולש שווה-שוקיים הגובה לבסיס הוא תיכון לבסיס. SH הוא גובה, AC הוא הבסיס. לכן HC=AH. ג) המשולש SBD הוא משולש שווה-שוקיים. בפירמידה ישרה מקצועות הפאות שווים באורכם. הנקודה H היא נקודת פגישת האלכסונים של הריבוע, שהוא בסיס הפירמידה. האלכסונים נחצים, כלומר SH הוא תיכון במשולש SBD. במשולש שווה-שוקיים התיכון הוא גם גובה. ד) ישר המאונך לשני ישרים במישור, מאונך למישור כולו.

לומדים, עמ' 442

השיעור האחרון של הפרק (ושל הספר) דן במשפט: גובה הפירמידה המרובעת הישרה מאונך לבסיס בנקודת חיתוך האלכסונים. כתוצאה ממשפט זה ניתן לבצע חישובים רבים בפירמידה, המבוססים על משפט פיתגורס.



מתרגילים

69. משולש המעטפת הוא משולש שווה-שוקיים שבסיסו הוא צלע הבסיס,ואורכה 12 ס"מ, ואורך השוק 10 ס"מ. הגובה לבסיס חוצה אותו. ניעזר במשפט פיתגורס. $h^2+6^2=10^2 \Leftarrow h=8$ ס"מ.

70. א) AC הוא אלכסון ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ. נמצא את אורכו בעזרת משפט פיתגורס. $6^2+6^2=AC^2 \Leftarrow AC=\sqrt{72}=8.49$. ב) במשולש ישר-זווית מתקיים משפט פיתגורס, וכן להפך: אם משפט פיתגורס מתקיים, המשולש הוא ישר-זווית. נבדוק שמתקיים: $AS^2+SC^2=AC^2$. פאות הפירמידה הן משולשים שווי-צלעות, אחת הצלעות היא צלע הקובייה אורכה 6 ס"מ, לכן אורך כל אחת ממקצועות הפירמידה הוא 6 ס"מ. $6^2+6^2=72$. בסעיף א' קיבלנו $AC^2=72$. כלומר משפט פיתגורס מתקיים. לפיכך המשולש הוא ישר-זווית. ג)ניעזר במשפט פיתגורס במשולש AHS או במשולש CHS. $AH=\frac{1}{2}AC=4.24$. $SH^2+4.24^2=6^2 \Leftarrow SH=\sqrt{18}=4.24$.

72. א) AC הוא אלכסון הריבוע שאורך צלעו 8 ס"מ. נמצא את אורכו בעזרת משפט פיתגורס. $8^2+8^2=AC^2 \Leftarrow AC=\sqrt{128}=11.31$. ב) המשולש AHS הוא משולש ישר זווית ושווה-שוקיים. (SH מאונך ל-AC, גובה של הפירמידה, $\angle SAH=45^\circ$, לכן גם $\angle ASH=45^\circ$.) SH=AH. ג) $AH=\frac{1}{2}AC=5.657$ (הגובה במשולש שווה-שוקיים הוא תיכון לבסיס.) SH=5.657 ס"מ. לפי סעיף ב', $\sqrt{32}=5.657$. ד) ניעזר במשפט פיתגורס במשולש AHS. $5.657^2+5.657^2=AS^2 \Leftarrow AS=8$ ס"מ. ה) ניעזר במשפט פיתגורס במשולש AMS או במשולש BMS. MS הוא תיכון במשולש ASB ולכן גם גובה. $4^2+h^2=8^2 \Leftarrow h=\sqrt{48}=6.93$. MS=6.93 ס"מ.

73. הסרטוט שבתרגיל 72 מתאים גם לתרגיל זה. כדי למצוא את שטח הציפוי, שהוא שטח המעטפת, יש למצוא את גובה הפאה. הפאות כולן הן משולשים שווי-שוקיים שבסיסם הוא 230 מ', צלע הבסיס. יש למצוא תחילה את אורך שוק המשולש, ולצורך זה יש לחשב את אורך אלכסון הבסיס. כל החישובים בעזרת משפט פיתגורס במשולשים שונים. אורך אלכסון הבסיס: $230^2+230^2=AC^2 \Leftarrow AC=\sqrt{105{,}800}=325.27$. לחישוב אורך שוק הפאה, נסתכל על המשולש שניצביו הם גובה הפירמידה ומחצית אלכסון הבסיס והיתר הוא השוק. $162.63^2+146^2=AS^2 \Leftarrow AS=\sqrt{47{,}766}=218.55$. לחישוב גובה הפאה נסתכל על המשולש שניצביו הם הגובה ומחצית הבסיס והיתר הוא שוק הפאה. $115^2+h^2=218.55^2 \Leftarrow h=\sqrt{34{,}541}=185.85$. שטח פאה: $\frac{185.85\cdot 230}{2}=21372.99$. במעטפת ארבעה משולשים, לכן שטח המעטפת הוא $31372.99*4=85491.96$. שטח הציפוי הוא 85,491.96 מ"ר.

יז. גיאומטריה במרחב

מיומנויות, עמ' 447

בפרק זה שני עמודים של מיומנויות. בראשון מלמדים איך לסרטט קובייה ופירמידה.
סרטוט קובייה הוא אחת מהמיומנויות הבסיסיות בגאומטריה, לכן חוזרים עליו כל שנה.
מיומנות זאת מתאימה במיוחד לפרק זה כי בתוך קובייה אפשר לצייר הרבה פירמידות.
דוגמאות של פירמידות כאלה מובאות בעמוד השני.
מומלץ לבקש מהתלמידים לסרטט פירמידות נוספות לפי הדוגמאות או לפי רצונם. אפשר לצייר פירמידה לא ישרה שקדקודה הוא נקודה של אחת מהפאות וקדקודי הבסיס הם קדקודי הפאה ממול.

מוכנים להמשיך?, עמ' 450

1. א-ב-ד-ו-ז-ט-יב: מנסרה; ג-יא: תיבה; ה-י: פירמידה; ח': אף אחד מהם.
2. א) AB, A_1B_1, DC ו- D_1C_1; ב) ABB_1A_1 ו- DCC_1D_1.
3. א) AGE ו- BCD; ב) DE ו- CG; ג) AG, AE, BC ו- BD.
4. א) 5 משולשים; ב) משולשים שווי-שוקיים; ג) משולש ישר-זווית; ד) 10 ס"מ $= SH$.
5. א) 17 ס"מ; ב) 864 סמ"ק; ג) 2; ד) 432 סמ"ק; ה) שטח כל בסיס: 54 סמ"ר; שטח פאות שבמעטפת: 72 סמ"ר, 96 סמ"ר ו- 120 סמ"ר (אורך אלכסון הפאה שמידותיה 8 ס"מ × 12 ס"מ הוא 15 ס"מ). שטח הפנים של כל מנסרה הוא: 396 סמ"ר $= 120 + 96 + 72 + 54 \cdot 2$.
6. א) 13 ס"מ $= SD$; ב) הפריסה שמצד ימין היא הפריסה הנכונה.

ממשיכים בתרגול, עמ' 452

75. א) פירמידה מרובעת ישרה. ב) פירמידה משולשת משוכללת וישרה (ארבעון). ג) מנסרה משולשת. ד) מנסרה משולשת.

76. א) לא. המשולשים הם שווי-שוקיים. הם יכולים להיות שווי-צלעות. ב) לא. הפאות אינן חייבות להיות משולשים חופפים. ג) כן. תיבה היא מנסרה שבסיסה מלבן או ריבוע. ד) כן. ה) כן. לכל אחת משש הפאות ששני אלכסונים ועוד ארבעה אלכסונים של התיבה.

78. א) שטח הפנים הוא שטח שני הבסיסים שהם משולשים ישרי-זווית חופפים, וכן שטח שלושת המלבנים. שטח המשולש הוא $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, לפיכך שטח שני המשולשים הוא 12 סמ"ר. המלבנים בנויים על ניצבי המשולש ועל היתר. כדי למצוא את היתר ניעזר במשפט פיתגורס. $3^2+4^2=c^2 \Rightarrow c=5$. שטחי המלבנים הם $84=7\cdot7+5\cdot7+3\cdot4$. שטח הפנים הוא 96 סמ"ר ($96=12+84$). ב) נפח המנסרה הוא מכפלת שטח הבסיס בגובה. 42 סמ"ק ($42=7\cdot6$).

79. נפח מנסרה הוא מכפלת שטח הבסיס בגובה, לכן כדי לקבל את שטח הבסיס יש לחלק את הנפח בגובה. שטח הבסיס הוא 10 סמ"ר ($10=60:6$). הבסיס הוא משולש ישר-זווית, שטחו מחצית ממכפלת הניצבים, לכן אורך הניצב הוא 5 ס"מ ($\frac{4 \cdot x}{2} = 10$).

80. א) המשולש הוא שווה-צלעות. צלעות המשולש הן אלכסוני הפאות. כל הפאות הן ריבועים חופפים, ולכן אורך האלכסונים שווה. ב) לחישוב היקף המשולש יש לחשב את אורך אלכסון הריבוע. ניעזר במשפט פיתגורס. $1^2+1^2=NT^2 \Rightarrow NT = \sqrt{2} = 1.414$. היקף המשולש הוא 4.24 ס"מ.

81. כדי לחשב את WS, גובה התיבה, אפשר להסתכל על משולש ישר-זווית שצלעותיו הן RW אלכסון הפאה $BROW$, אלכסון התיבה SR, ו-SW. כל אלכסוני התיבה שווים, ולכן $SR=97$ מ'. לחישוב אלכסון הפאה ניעזר במשפט פיתגורס במשולש BRW. ($NI=BR=33$). $33^2+56^2=BR^2 \Rightarrow BR=65$ מ'. לחישוב WS ניעזר במשפט פיתגורס במשולש RWS. $65^2+WS^2=97^2 \Rightarrow WS = 72$ מ'.

82. אפשר להיעזר בסרטוט של תרגיל 72 וכן בדרך החישוב. גובה הקופסה הוא 16 ס"מ ($18^2+24^2+h^2=34^2$).

83. א) ניעזר במשפט פיתגורס כדי לחשב את FD ואת FB, שהם אלכסוני הפאות, כאשר כל פאה היא מלבן שצלעותיו נתונות. $3^2+4^2=FB^2 \Rightarrow FB=5$ ס"מ. $3^2+4^2=FD^2 \Rightarrow FD=5$ ס"מ. ב) לפי סעיף א', המשולש הוא שווה-שוקיים, כיוון ש- $FB=FD$.

84. לפי מספר המשולשים, שהם הפאות, אפשר לדעת איזה מצולע הוא הבסיס. א) משושה. ב) מתומן. ג) מתומן. ד) משושה. ה) משושה. ו) משולש.

יז. גיאומטריה במרחב

העמקה, עמ׳ 457

כל המשימות שבעמוד דורשות ראייה מרחבית.

1. א) המעטפת בנויה משני משולשים ישרי-זווית חופפים : EAB ו- EAD. (הצלע EA משותפת, הצלעות AB ו- AD הן צלעות ריבוע הבסיס, הזוויות ליד שקדקוד A הן ישרות.) יש שני משולשים נוספים חופפים : EBC ו- EDC. (הצלע EC משותפת, הצלעות BC ו- DC הן צלעות ריבוע הבסיס, הצלעות EB ו- ED הן היתר במשולשים ישרי-הזווית החופפים.)

2. ב) בכל הפירמידות הבסיס הוא אחת מפאות הקובייה, והגובה מתלכד עם אחת הצלעות של הקובייה.
ג) שלוש הפירמידות ביחד ממלאות את כל הקובייה בלי רווח. ד) נפח כל פירמידה הוא שליש מנפח הקובייה. נפח הקובייה הוא $4^3=64$. לכן נפח כל פירמידה הוא $\frac{1}{3}\cdot 64 = 21\frac{1}{3}$ סמ״ק.

3. נפח הפירמידה הוא שליש מנפח התיבה. 140 סמ״ק ($\frac{1}{3}\cdot 6\cdot 7\cdot 10 = 140$).

4. לפי האיור ולפי תרגילים 1-3 נפח פירמידה הוא שליש מנפח תיבה, כאשר בסיס הפירמידה הוא אחת מצלעות התיבה.

היסטוריה, עמ׳ 458

שטוחלנדיה נכתב בתחילת המאה ה- 20 ונתפש אז כסָאטירה של החברה הויקטוריאנית.
למרות ההיבט נגד הנשים שיש בו, הוא אחד מהספרים הטובים ביותר להבנת גאומטריה במרחב.