4. ביטויים אלגבריים ושוויונות

רקע

התלמידים למדו את המושגים "משתנה", "ביטוי אלגברי", "הצבה" ו"ביטויים שווים" בפרק 1. בחלק הראשון של הפרק הזה ירכשו התלמידים מספר מיומנויות הקשורות לביטויים האלגבריים, כגון: זיהוי וכתיבה של ביטוי אלגברי השווה לביטוי אלגברי נתון, וזאת על-ידי חוקי הפעולות, זיהוי איברים בביטוי אלגברי וכינוס איברים דומים. בחלק השני של הפרק נתייחס לתכונות השוויון, הקשורות לארבע פעולות החשבון. אחד הקשיים המרכזיים בהוראת האלגברה טמון בתפיסה שגויה של התלמידים לגבי הסימן = בשוויונות. מבחינתם, מימין לסימן המשמעות היא "תוצאה של פעולה או של תרגיל". תפיסה זו מובילה לאי-סימטריה של השוויון, ותלמידים קוראים אותו רק משמאל לימין. התוצאה היא שיש להם קושי לעבוד בו-זמנית על שני אגפי השוויון. מטרת הפרק היא לטפל בצורה מעמיקה בקושי זה.

במקביל ללמידת תכונות השוויון התלמידים יפתרו משוואות פשוטות מתאימות, מהסוג

$x + a = b$. $x - a = b$. $a \cdot x = b$ או $x : a = b$.

(הערה: בשלב זה איננו משתמשים במושג "פתירת משוואה" אלא במושג "מציאת ערך האות בשוויון".)

בפרק הבא ילמדו התלמידים לפתור משוואות ושאלות מילוליות מורכבות יותר. יש להדגיש כי לרכישת הכלים הבסיסיים בנושא – או במילים פשוטות, לידיעה "מה מותר לעשות כאשר יש משתנה בשוויון" – יש חשיבות רבה ביותר להמשך הלימודים במתמטיקה: כל סוגיה באלגברה (או באנליזה), הן בהמשך השנה והן בכיתות הבאות, מבוססת על הנלמד בפרק זה. התלמידים יתבקשו תמיד, לכתוב ולעבד שוויונות (על-ידי התכונות הנלמדות כאן) כדי להרגילם למצוא מידע רלוונטי.

מומלץ להקדיש לפרקים 4 ו- 5 בסך הכול כ- 17 שעות (בתוכנית הלימודים מדובר ב- 15 שעות), כי הם מהווים בסיס לכל האלגברה.

הכנה זו מאפשרת להקדיש בהמשך פחות זמן להיבטים טכניים של פתרון משוואות ולהתמקד בשאלות מילוליות.

קשיים בהוראת הנושא:

- אי-הבנה של תפקיד האות ושל המושגים "משתנה" ו"ביטוי אלגברי".
- קשיים הקשורים לסדר הפעולות בחישובים ובהצבות.
- קושי בהבנה של הצבת מספר (או ביטוי) במקום אות.
- קושי להגדיר את המושג "איבר" בביטויים אלגבריים: איבר יכול להיות ביטוי שהוא רק מכפלה (או מנה) של משתנה במספר, והוא יכול להיות מספר בלי משתנה.

- קושי בהבהרת המושג *איברים דומים*.
  - לאיברים דומים יש אותו משתנה או אותו צירוף של משתנים, ולעתים יש לאותם משתנים אותן חזקות, והם שונים רק במקדם המספרי שלהם. דוגמאות: האיבר "$2 \cdot \boldsymbol{b}$" והאיבר "$4 \cdot 5 \cdot \boldsymbol{b}$"; האיבר $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$ והאיבר $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}$; אבל $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ שונה מ–$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ ו- $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b}^2$.
  - בכינוס איברים דומים הפעולות נעשו על מקדמים, למשל באמצעות חוק הפילוג. $2 \cdot \boldsymbol{b} + 3 \cdot \boldsymbol{b} = (2 + 3) \cdot \boldsymbol{b} = 5 \cdot \boldsymbol{b}$
  - איבר חופשי הוא חופשי ממשתנים והוא למעשה מספר.
- קושי בזיהוי המקדם של המשתנה. תלמידים רבים חושבים שמשמעות המילה "מקדם" היא "מה שבא לפני" כך שבשבילם המקדם של $\boldsymbol{x}$ בביטוי $\frac{3 \cdot \boldsymbol{x}}{2}$ הוא 3 ולא $\frac{3}{2}$.
- קשיים בהבנה שאפשר לקרוא שוויון משמאל לימין או מימין לשמאל, ובהבנה שהסימן "=" אינו מציין שמצדו הימני כותבים רק את התוצאה של פעולה/שרשרת של פעולות.
- קושי בשימוש בסוגריים כאשר מבצעים פעולות בתכונות השוויון לכפל.
- מקור טעויות רבות הוא ההבדל בין אמירת ביטוי בעל-פה לבין כתיבתו. למשל, אפשר להבין את האמירה "שתיים כפול $\boldsymbol{a}$ ועוד 6" כך: $2 \cdot \boldsymbol{a} + 6$ או כך: $2 \cdot (\boldsymbol{a} + 6)$.
- קושי בשימוש בשברים בכלל וכשמשתמשים בתכונות השוויון לכפל, ובפרט לחילוק.

מבנה הפרק

מדור א. ביטויים אלגבריים (המשך)

א.1	ביטויים שווים	**שיעור אחד**
א.2	איברים של ביטויים אלגבריים	**שיעור אחד**
א.3	כינוס איברים דומים	**שיעור כפול**

מדור ב. שוויונות

ב.1	קשר השוויון	**שיעור כפול**
ב.2	שוויון והצבה	**שיעור אחד**
ב.3	תכונות השוויון: חיבור וחיסור	**שיעור כפול**
ב.4	תכונות השוויון: כפל וחילוק	**שיעור אחד**

ארגון ההוראה

כאמור במבוא הכללי, אי-אפשר לבצע את כל המשימות המובאות בפרק. האייקונים עוזרים לבחור את המשימות לרמת הכיתה. אפשר לוותר על המשימות מסוג "נוצה" בכיתות מתקדמות ועל המשימות מסוג "אתגר" בכיתות חלשות. המשימות באייקון "משולש" מומלצות לכל הכיתות, אך אפשר לבצע רק מספר סעיפים במשימות אלה לפי רמת הכיתה.

לפרק זה כדאי להשתמש בלוח מחיק (דף לבן בתוך מגן-דף [ניילון] שכותבים עליו בטוש נמחק).

שימוש זה עונה על הצורך בכתיבה (ראו "קשיים") ומאפשר בדיקה מהירה של התשובות.

כאמור בהקדמה, מומלץ להקדיש כרבע שעה ל-"מגלים–לומדים" ואת יתר הזמן לתרגול.

מושגים ומונחים

משתנה, ביטוי אלגברי, סכום של מספרים, משתנים או ביטויים, מכפלה של מספרים, הפרש של מספרים, מנה של מספרים, הצבה של מספר או ביטוי בביטוי אלגברי, ערך של ביטוי, ביטויים שווים, שוויון, אגפים, תכונות השוויון, "תרגום" לביטוי אלגברי, איברים, איברים דומים, איבר חופשי, כינוס איברים דומים.

מטרות

התלמידים ידעו:

א למצוא ביטוי אלגברי המתאים למצב נתון;
ב להציב מספרים/ביטויים בביטויים אלגברים;
ג למצוא ערך של ביטוי אלגברי בהצבה מסוימת;
ד להבין את המשמעות של ביטויים אלגבריים שווים;
ה לזהות ביטויים אלגבריים שווים;
ו לעבור מביטוי אלגברי לביטוי שווה בעזרת חוקי פעולות החשבון;
ז לפתור בעיה בעזרת בניית ביטוי אלגברי המקשר בין הנתונים ומציאת ערכו בעזרת הצבת מספרים;
ח להבדיל בין איברים דומים ואיברים שאינם דומים;
ט לכנס איברים דומים;
י לפתוח סוגריים;
יא לפשט ביטוי אלגברי;
יב להשתמש בתכונות השוויון בחיבור ובחיסור;
יג להשתמש בתכונות השוויון בכפל ובחילוק;
יד לבודד משתנה בשוויון על–ידי תכונות אלו.

השיעור בספר הלימוד

מגלים ולומדים עמ' 188

א. ביטויים אלגבריים (המשך)

א.1. ביטויים שווים

מגלים (עמ' 188)

א יש דרכים שונות להגיע לתשובה נכונה, כגון: $k = 2 \cdot n - 1$, $k = (n-1) + (n-1) + 1$, $k = n + n - 1$.
אחת האפשרויות היא לבקש מהתלמידים לחשב את הערך של $2 \cdot n$ בכל ריבוע וריבוע. כך יהיה קל יותר להבין כי ההפרש בין $2 \cdot n$ לבין k הוא 1, כלומר ש– $k = 2 \cdot n - 1$.

ג רצוי לציין לתלמידים כי הואיל והביטוי $k = 2 \cdot n - 1$ והביטוי $k = (n-1) + (n-1) + 1$ מתארים אותה מציאות המופיעה בריבועים, אפשר לומר שהם מייצגים אותו קשר, והם שווים ללא צורך בשום חישוב נוסף.
אם התלמידים רוצים לראות כיצד הופכים את אחד הביטויים לביטוי אחר, אפשר להציע להם את הדרך שלהלן. $k = (n-1) + (n-1) + 1 = n - 1 + n - 1 + 1 = n + n + 1 - 1 - 1$
ולכן $(n-1) + (n-1) + 1 = 2 \cdot n - 1$

לומדים (עמ' 188)

התלמידים כבר למדו את המושג "ביטויים שווים" בפרק א'. כאן המטרה היא לגרום לתלמידים לזהות ולכתוב ביטויים השווים לביטוי נתון, על-ידי שימוש שיטתי בחוקי פעולות החשבון. בשלב זה התלמידים משתמשים בחוק החילוף והקיבוץ בפעולות החיבור והכפל, וכן בכללים השייכים לחילוק במנה או במכפלה. אם התלמידים מתקשים, מומלץ להדגים את המשימות על-ידי הצבת מספרים פשוטים ולעודד את התלמידים להציב בביטויים מספרים כרצונם כדי לבדוק את תשובותיהם.

משימות

המשימות 1, 2, 3 ו- 5 הן יישומים בסיסיים של השיעור לכל התלמידים. (מספיק לבחור כמה סעיפים בכל תרגיל כדי שהתרגול לא יימשך יותר מדי זמן.) משימות 4 ו- 6 קשות יותר, ואפשר להציע אותן לתלמידים מתקדמים בלבד.
מומלץ לבצע את משימות 3, 5, 6 ו- 8 בכיתה.

1 בסעיף ג' תלמידים יכתבו: $6 + 2 \cdot m = 2 + 6 \cdot m$.
רצוי לבקש מהתלמידים האחרים להסביר למה תשובה זו אינה נכונה. לשם כך אפשר להציב בשני הביטויים מספר כמו 1 או 2 ולראות שמקבלים ערכים שונים. הסיבה לכך קשורה לסדר פעולות החשבון, לפיו מבצעים את פעולות הכפל לפני פעולות החיבור.

3 כאמור בתרגיל 1, תלמידים עלולים לכתוב $5 + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + 5 \cdot \boldsymbol{a}$. גם כאן אפשר להשתמש בהצבות ולהזכיר את סדר פעולות החשבון כדי לעזור לתלמידים הזקוקים לכך.

4 המשימה קשה יותר. הציעו לתלמידים לכתוב את פעולת החילוק כשבר.

א $\boldsymbol{a} : 6$ **ב** $\boldsymbol{b} : 4$ **ג** $\boldsymbol{c} : 50$ **ד** $\boldsymbol{d} : 10$ **ה** $\boldsymbol{k} : 2$ **ו** $\boldsymbol{m} : 16$ **ז** $\boldsymbol{z}$ **ח** $\boldsymbol{y} : 100$

5 עודדו את התלמידים להשתמש בחזקות ולכתוב את המקדמים משמאל למשתנים.

א $7 \cdot \boldsymbol{a}$ **ב** $10 \cdot \boldsymbol{a}^2$ **ג** $3 \cdot \boldsymbol{d}^2$ **ד** $4 \cdot \boldsymbol{d}$ **ה** $8 \cdot \boldsymbol{a}$ **ו** $12 \cdot \boldsymbol{a}$ **ז** $\boldsymbol{b}^2$ **ח** $2 \cdot \boldsymbol{b}$

6 שאלה מילולית. בשאלה זו מקשרים בין חוקי הפעולות ובין שימוש במשתנה.

7 לכיתות בינוניות ומתקדמות אפשר לתת את המשימה לשיעורי בית, ואילו בכיתות החלשות מומלץ לבצע כמה סעיפים בעזרת לוח מחיק.

8 אילו לא הייתה נוכחות משתנה, היה תוכן השאלה ברמה של בית ספר יסודי. בכיתות חלשות מומלץ לבקש מהתלמידים להציב מספר במקום המשתנה ולענות על השאלות.

החלק השני של המשימות מוקדש לשימוש בכללים השייכים לפתיחת סוגריים אחרי סימן + או – . יש לעודד את התלמידים להציב לפי הצורך מספרים בביטויים הנדונים. בדרך כלל התלמידים אינם טועים כאשר יש סימן "+" לפני הסוגריים, אך לא כך כאשר יש סימן "–", ולכן אפשר להתמקד בסעיפים המוקדשים למקרה השני, בעיקר אם חסר זמן.

בכיתות החלשות מומלץ לתלות בכיתה בריסטול שבו תוכן ה"זכרו".

<u>הערה</u>: בשלב זה איננו מבקשים מהתלמידים לכנס איברים דומים בביטויים המתקבלים.

מומלץ לבצע בכיתה את המשימות מסוג "משולש" 11, 12 ו- 14 או לבצע חלק מהן בעזרת לוח מחיק ולתת את יתר המשימות כשיעורי בית.

<u>משימות</u>

9 – 12 משימות של פתיחת סוגריים ללא שימוש בחוק הפילוג (כלומר יש רק סימן + או – לפני הסוגריים).

13 – 16 על תלמידים להשתמש גם בחוק הפילוג. כאן מופיעים מספרים "קלים" מכל הסוגים (טבעיים, עשרוניים ושברים). בכל משימה אפשר להתמקד במשימות של חוק הפילוג, ולא במשימות של פתיחת הסוגריים אחרי סימן + או –.

17 בכיתות החלשות כדאי לבצע את המשימה בכיתה כדי לבדוק את רמת הבנת הנקרא.

19 כל הביטויים שווים (הם שווים ל- $5 \cdot \boldsymbol{x} + 2$) חוץ מביטוי ד', השווה ל- $9 - 2 \cdot \boldsymbol{x}$.

אתגר

א.2. איברים של ביטויים אלגבריים

לומדים (עמ' 192)

בחלק הראשון של השיעור התלמידים נחשפים למושג "איבר". מאחר שקשה לתת הגדרה פורמלית שלמה של מושג זה, עדיף לאפשר לתלמידים להבין אינטואיטיבית את המושג על-ידי דוגמאות ולהסביר שמדובר בדרך כלל במחוברים או במחוסרים בביטוי אלגברי. עם זאת המושג חשוב כי הוא המרכיב הבסיסי של כינוס איברים.

הערה: אין בשיעור זה "מגלים", כי המושג "איבר" מופשט מאוד.

משימות

20 – 26 תרגילי יישום קלים יחסית על המושג איבר. אפשר לבקש מהתלמידים (בעיקר המתקשים) להקיף בעיגול את האיברים השונים שבכל ביטוי נתון (או לסרטט קו תחתון מתחת לכל איבר). רצוי להזכיר את המונח "איבר חופשי" ולהרגיל את התלמידים להשתמש בו. טעות מצויה במשימות כמו התרגיל 25 היא לחשוב שבביטוי $\boldsymbol{x} \cdot 6$ יש שני איברים: 6 ו- $\boldsymbol{x}$. יש להזכיר כי האיברים הם **המחוברים** של הביטוי, ו- $\boldsymbol{x}$ ו- 6 אינם מחוברים בביטוי $\boldsymbol{x} \cdot 6$. אם יש צורך בכך, אפשר לדלג על המשימות שמופיעים בהן שני משתנים או יותר. בחלק מהמשימות אפשר לדון בעל-פה.

27 – 30 הביטויים המופיעים כאן הם ארוכים ומורכבים יותר, כוללים כמה משתנים וחזקות. אפשר להציע את המשימות האלה לתלמידים מתקדמים ובכיתות אחרות לנתח אותן ביחד.

לומדים (עמ' 193)

בחלק השני של השיעור התלמידים נחשפים למושג "מקדם". יש לציין כמה עובדות בסיסיות בנושא.

- כידוע, כאשר בביטוי מופיע חד-איבר ללא מקדם לפני המשתנה, המקדם הוא 1. למשל, המקדם של $\boldsymbol{x}$ בביטוי $\boldsymbol{x} + 3$ הוא 1 (חלק מהתלמידים יחשבו שהמקדם הוא 3).
- מקדם יכול להיות שבר. למשל, בביטוי $\frac{2\boldsymbol{x}}{3}$, המקדם של $\boldsymbol{x}$ הוא $\frac{2}{3}$. אחת מהטעויות הנפוצות היא לחשוב שהמקדם הוא "מה שלפניו". לדוגמה, בביטוי $\frac{2\boldsymbol{x}}{3}$ תלמידים יגידו שהמקדם של $\boldsymbol{x}$ הוא 2.
- בשלב זה לא ניכנס לחיוביות או לשליליות של מקדם.
- ייתכן שמקדם אינו כתוב בפירוש בביטוי אלגברי, אלא דורש חישוב כלשהו. למשל, בביטוי $3 \cdot \boldsymbol{x} \cdot 2$, המקדם של $\boldsymbol{x}$ הוא 6.

משימות

31 – 36 תרגילי יישום בסיסיים על המושג "מקדם". אף-על-פי שבהרבה סוגיות אחרות אפשר לוותר על משימות שמופיעים בהן שברים, מומלץ לבקש אפילו מהתלמידים המתקשים לעסוק גם בסעיפים אלה. הנושא חשוב בנושאים שיילמדו בעתיד, כגון משוואת הישר.

אפשר לדון בחלק מהמשימות בעל-פה.

אפשר להיעזר בלוח המחיק ולבקש מהתלמידים לכתוב איבר שהמקדם שלו הוא מספר טבעי, מספר עשרוני, שבר.

35 – 36 משימות מורכבות יותר שהתלמידים המתקשים אינם חייבים לפתור. בכל זאת רצוי לדון לפחות בסעיף אחד או שניים. פישוט ביטויים כגון $5 \cdot a \cdot 2 = 10 \cdot a$ בתרגיל 36 הוא שימושי מאוד במגוון רחב של משימות בהקשרים שונים.

א.3. כינוס איברים דומים

אם אפשר, מומלץ לעסוק בנושא בשיעור כפול. כדאי להקדיש כרבע שעה לפעילות גילוי ולשיעור שבעמוד 195, לאחר מכן לבצע את משימות 37, 39 ו- 40. בחלק הראשון מספר רב של משימות המאפשרות התאמה לרמת הכיתה.

בכיתות חלשות כדאי לבצע בעל-פה את משימות 41, 42 (או 43), 44, 50 ו- 58.

<u>לומדים (עמ' 195)</u>

בחלק הראשון של השיעור מגלים התלמידים את המושג "איברים דומים": איברים דומים בביטוי אלגברי הם איברים שיש להם **אותו משתנה** או אותם משתנים **באותה חזקה**. איברים דומים יכולים להיות שונים זה מזה רק במקדמים. בפעילות הגילוי שתימשך 5 דקות, אפשר לזהות את האיברים הדומים ולהבליט את השוני שבאיברים שאינם דומים, על-ידי ייצוגים חזותיים הקשורים לגאומטריה (אורך, שטח, נפח). מומלץ להשתמש גם בצבעים. לשיעור זה מקום מרכזי בלימוד האלגברה.

<u>משימות</u>

37 במשימה זו רצוי להסב את תשומת לבם של התלמידים לכך ש"דמיון" איברים אינו קשור לכך שמספר כלשהו (שאינו משתנה) מופיע כמה פעמים בביטוי נתון. למשל, בסעיף א' תלמידים עלולים לומר שהאיברים $8 \cdot x^2$ ו- 8 הם איברים דומים, כי המספר 8 מופיע בשניהם. יש להסביר לתלמידים, כי תפיסה זו שגויה.

38 – 39 משימות נוספות בנושא זיהוי איברים דומים. מאחר שהביטויים המופיעים כאן מורכבים יותר מאלה שבמשימה הקודמת, מומלץ לבקש מהתלמידים להקיף בעיגול את האיברים השונים שבכל ביטוי נתון, כדי להקל את זיהוי האיברים הדומים. אפשר גם להשתמש בקו תחתון בצבעים שונים.

40 תרגיל הכנה לכינוס איברים דומים. יש להגיע היא למסקנה שאפשר לקבץ ולספור ביחד צורות זהות בלבד. בקטע השיעור הבא ילמדו התלמידים שבביטוי אלגברי אפשר לקבץ ולספור ביחד איברים דומים בלבד. ההמחשה המוצגת כאן לקוחה מחומרי למידה הנפוצים בקנדה.

<u>לומדים (עמ' 196)</u>

בחלק השני של השיעור התלמידים עוסקים בכינוס איברים דומים בפני עצמם. לכינוס איברים בביטוי אלגברי יש חשיבות רבה, מכיוון שהוא כלי חיוני במגוון מיומנויות באלגברה, כגון פתירת משוואות. על-פי הניסיון, כינוס איברים דומים אינו משימה פשוטה לתלמידים. במקרים רבים תלמידים "שוכחים" את מה שלמדו בחלק

הראשון של השיעור, ומנסים לחבר איברים שאינם דומים, כדי שהביטוי המתקבל ייראה פשוט יותר. גם כאן אפשר להשתמש בייצוגים החזותיים של פעילות הגילוי לפי הצורך. כמו-כן אפשר לבקש מהתלמידים לסמן את האיברים הדומים בביטויים בדרכים שונות (קווים תחתונים בצבעים שונים וכדומה).

משימות

41 תרגיל יישום מידי על-ידי ייצוגים. אפשר (ואפילו מומלץ) להשתמש בייצוגים אלה במשימות אחרות.

42 – 44 משימות בסיסיות בנושא כינוס איברים דומים. יש לשים לב במיוחד לתרגיל 43, בו אנו דנים במקור טעות נפוצה: כינוס איבר חופשי עם איבר שאינו חופשי, כאשר האיבר החופשי נמצא בצד שמאל, למשל: $3 + 2 \cdot y = 5 \cdot y$.

45 משימה של הבנת הנקרא.

46 משימה הדומה למשימה 44 לשיעורי בית.

47 – 61 משימות נוספות מורכבות יותר. אם חסר זמן, אפשר להסתפק בכמה סעיפים בכל אחד מהנושאים: כינוס איברים וסוגריים (משימות 47 ו- 54), כינוס איברים של חזקות (משימה 51), כינוס איברים שיש בהם שניים או שלושה משתנים (תרגיל 51), יישומים בגאומטריה (משימות 56 – 57).

ב. שוויונות ומשוואות

ב.1. קשר השוויון

אם אפשר, מומלץ לעסוק בנושא בשיעור כפול.

מגלים (עמ' 202)

א – ד מחיר המכונית והמתנה הוא 50 ₪. מחיר העוגה הוא 25 ₪.

ה האיור אינו נכון: מחיר המתנה שווה למחיר של 2 עוגות.

לומדים (עמ' 202)

אף-על-פי שהמושג *שוויון* נראה פשוט למורים, הוא אינו פשוט לחלק ניכר מהתלמידים. כאמור, אחד מהקשיים העיקריים בהוראת הנושא טמון בתפיסה שגויה של התלמידים לגבי הסימן = בשוויונות: מבחינתם, מימין לסימן יש "תוצאה של פעולה או של תרגיל". לכן רצוי לומר בפירוש שאפשר לקרוא שוויון משמאל לימין וגם מימין לשמאל. התלמידים המודעים לעובדה זו מצליחים בדרך כלל בשוויונות, כי הם מבינים מהר יותר על איזה אגף "מעניין" יותר להתחיל לעבוד.

נוסף על כך, רצוי להדגיש שאין בעיה לכתוב פעולה באגף הימני של שוויון. זה, כמובן, תנאי הכרחי לשימוש בתכונות השוויון.

בחלק הראשון של השיעור מציגים לתלמידים את המושגים "שוויון", "אגף של שוויון", "שוויון מתקיים" ו"שוויון לא מתקיים". מוצע לתת להם כמה דוגמאות פשוטות (אפשר גם לעודד אותם להמציא דוגמאות בעצמם). רוב התלמידים אינם מתקשים להפנים מושגים אלה, שהרי הם נתקלו בהם בשיעורים קודמים.

הקשר "שוויון" (ותכונותיו) אינו שמור רק לתחום המספרי . גם חפיפה, לדוגמה, היא קשר "שוויון".

משימות

62 – **69** יישומים מגוונים של המושג שוויון. רצוי להקדיש לפחות כמה דקות לכל אחד מנושאים אלה.

62 כתיבת פעולת חשבון או שבר באגף הימני של שוויון. שוויונות אלה תקינים לגמרי.

63 , **66** זיהוי ערך של משתמש המתאים לשוויון נתון. משימות אלה מהוות הכנה לנושא משוואות.

65 תיאור קשר על-ידי שוויון.

64 , **67** , **68** זיהוי וכתיבה של שוויונות שמתקיימים תמיד או שאינם מתקיימים תמיד.

לומדים (עמ' 204)

החלק השני של השיעור מוקדש לתכונות יסודיות של השוויון: רפלקסיביות (כל ביטוי שווה לעצמו), סימטריה (אם $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}$) וכללי העברה (אם ביטוי ראשון שווה לביטוי שני, והביטוי השני שווה לביטוי שלישי, גם הביטוי הראשון שווה לביטוי השלישי). רוב התלמידים מבינים תכונות אלה באופן אינטואיטיבי. הקושי העיקרי בסוגיה זו הוא היישום במשימות בהן תלמידים צריכים לכתוב שוויונות עם פעולות חשבון בשני האגפים.

69 – **76** הנתונים מהווים הזדמנות לחזור על תכונות השוויון הבסיסיות שנלמדו בשיעור, ולהרגיל את התלמידים להשתמש בביטויים כגון "כלל העברה" בהקשרים שונים, אפילו בפתירת שאלה מילולית או שאלה בגאומטריה. למשל, במשימה 76, אפשר לומר

- $\mathbf{EO} = \mathbf{OC}$ (שני הקטעים הם רדיוסים של המעגל);
- $\mathbf{OC} = \mathbf{CB}$ (שני הקטעים הם צלעות של הריבוע);
- $\mathbf{CB} = \mathbf{AC}$ (שני הקטעים הם צלעות של המשולש שווה–הצלעות);
- לפי כלל העברה, $\mathbf{EO} = \mathbf{CB}$; לפיכך $\mathbf{CB} = \mathbf{AC}$, ואפשר ליישם שוב את כלל העברה ולהסיק: $\mathbf{EO} = \mathbf{AC}$.

ב.2. שוויון והצבה

מגלים (עמ' 206)

דרך אפשרית להגיע לתשובה הנכונה (פיל ושלושה סוסים אכן חזקים כמו חמישה שוורים) היא כך:

פיל + 3 סוסים = שור + 2 סוסים + 3 סוסים (מציבים שור + 2 סוסים במקום פיל);

לכן פיל + 3 סוסים = שור + 5 סוסים = שור + 4 שוורים (מציבים 4 שוורים במקום 5 סוסים);

כלומר: פיל + 3 סוסים = 5 שוורים.

פעילות זו תעזור לתלמידים להבין כי אפשר להציב בשוויון ביטויים מורכבים, ולא רק מספר.

מקור הפעילות: מחקר של מכון FREUDENTHAL: REINVENTION OF ALGEBRA.

לומדים (עמ' 207)

בפרק א' למדו התלמידים להציב מספר במקום משתנה. החידוש כאן הוא שאפשר להציב מספר במקום ביטוי וכן ביטוי במקום מספר (באופן כללי, ביטוי במקום ביטוי). תכונות השוויון שיילמדו החל מהשיעור הבא נובעות באופן ישיר מיסוד זה. בשיעור זה מובאות גם משוואות פשוטות (בלי להשתמש במילה "משוואה"), שיכינו אף הן את התלמידים ללימוד תכונות השוויון. אם התלמידים מתקשים במשימות, מומלץ להציע ייצוגים מוחשיים, כגון מאזניים.

משימות

ריבוי המשימות בחלק זה מאפשר להתאים את המטלות לרמת הכיתה.
מומלץ לבצע בכיתה בעל-פה לפחות את המשימות 83, 86, 88 ו- 89.
מומלץ לבצע אחת מהמשימות מכל סוג ולתת לפחות משימה אחת לשיעורי בית.

77 – 79 תרגילי הצבה קלים יחסית. בכל זאת משימות אלה חשובות משום שהן מכינות את התלמידים לשימוש בתכונות השוויון בחיבור ובכפל. מומלץ לבצע את המשימות בעל-פה.

80 – 81 חישוב מכפלות על-ידי הצבות מתאימות, כפי שמתואר בדוגמאות. באמצעות משימות כאלה התלמידים יכולים לראות שמושגי האלגברה אינם מוגבלים לחישובים אלגבריים מורכבים עם אין-ספור משתנים, אלא יכולים לשמש גם בפעולות חשבון פשוטות.

82 – 85 תרגילי הצבה נוספים עם צורות. חלק מהתלמידים ה"פוחדים" ממתמטיקה בכלל וממשתנים בפרט מצליחים יותר להשתמש במושגים הנלמדים בדרך זו, אף-על-פי שאין שום הבדל מהותי בין משתנה כגון x לבין סימן כגון ☺. לכן אפשר לומר לתלמידים הפותרים משימות אלה בהצלחה, שאכן הם מתמצאים באלגברה.

86 – 96 במשימות אלה התלמידים מתבקשים לגלות ערכים של משתנים על-פי הנתונים, על-ידי שימוש בהצבות. בכיתה ח' יפתרו התלמידים מערכות משוואות על-ידי שיטות דומות למדי.

90 הקושי בסעיפים ב' ו- ג' הוא שיש להתבונן בנתונים ולהתחיל בנתון השלישי.

א ☺: 8. ❀: 92. ✡: 12.

ב ☺: 7. ❀: 14. ✡: 56.

ג ☺: 400. ❀: 3. ✡: 45.

92 – 93 הקושי טמון בכך שכל המשתנים מופיעים פעמיים בטבלה, לכן סכום המספרים הנתונים שווה לפעמיים סכום המשתנים. מכאן והלאה הפתרון קל.

ב.3. תכונות השוויון: חיבור וחיסור

לומדים (עמ' 210)

התלמידים לומדים כאן את התכונות הידועות: אם $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftarrow \mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ וגם $\mathbf{A} - \mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{C}$. בדרך כלל מבינים תכונות אלה, אך מתקשים ליישם אותן כאשר במקום **A**, **B** ו- **C** יכולים להיות למעשה ביטויים, ולא מספרים או משתנים. כדי להקל על התלמידים המתקשים באלגברה וכדי לגוון את התרגול מובאות משימות עם הקשרים ייצוגים שונים: אלגבריים, עם צורות גאומטריות, עם מאזניים, וכדומה.

משימות

ריבוי משימות בחלק זה מאפשר להתאים את המטלות לרמת הכיתה.

מומלץ לבצע בכיתה בעל-פה לפחות את משימות 98, 102, 105 ו- 106 וכן שני סעיפים של 110.

97 – 104 משימות יישום של תכונות השוויון עם ייצוגים חזותיים שונים (מאזניים, צורות גאומטריות...). אף על-פי שבדרך כלל אפשר לגלות את התשובות הסופיות של המשימות בלי להשתמש במשתנים ובלי להזכיר בפירוש את תכונות השוויון, יש לעודד את התלמידים לכתוב שוויונות ולהשתמש באוצר המילים הנלמד.

105 – 112 משימות יישום של תכונות השוויון ללא ייצוגים. כמו במשימות הקודמות יש "להכריח" את התלמידים לכתוב שוויונות ולהשתמש בפירוש בתכונות השוויון. גם אם אפשר לתת תשובות באופן אינטואיטיבי. אם יש צורך בכך, אפשר להשתמש בייצוגים שהשתמשנו בהם במשימות הקודמות, כדי להקל את הפתרון של חלק מהמשימות בקרב התלמידים המתקשים.

לומדים (עמ' 214)

בחלק זה של השיעור דנים בשוויונות $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ ו- $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$. שוויונות אלה מהווים למעשה דרך אופרטיבית לבודד משתנה בשוויון מהסוג $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ או $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, ולכן ייעשה בהם שימוש תדיר בהמשך השנה. הייצוג על-ידי קטעים יכול לעזור לתלמידים לתאר את הנתונים ולפתור שאלות ללא צורך בכתיבה "אלגברית".

משימות

113 – 118 משימות שהן למעשה פתרון משוואות פשוטות בהן התלמידים יבודדו את הנעלם על-ידי תכונות השוויון. יש לשים לב שבתרגיל 114 סעיף ב' יש לפעול בשלבים, למשל:

$$25 - \boldsymbol{y} = 12 \quad | + \boldsymbol{y}$$
$$25 - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} = 12 + \boldsymbol{y}$$
$$25 = 12 + \boldsymbol{y} \quad | - 12$$
$$\boldsymbol{y} = 25 - 12$$
$$\boldsymbol{y} = 13$$

<u>הערה</u>: אפשר להציע לתלמידים לציין את הפעולות שהם מבצעים על שוויונות, כפי שעשינו לעיל, על-ידי כתיבת "$+\boldsymbol{y}$", "-12" וכדומה, אבל אין בכך חובה בשלב זה.

119 – 121 משימות נוספות על שימוש בתכונות השוויון, ולאו דווקא על בידוד משתנה.

4.ב תכונות השוויון: כפל וחילוק

לומדים (עמ' 215)

התלמידים לומדים כאן את תכונות השוויון הקשורות לכפל ולחילוק: אם $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ו- $\mathbf{C} \neq 0$ ⇐ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ ו- $\mathbf{A} : \mathbf{C} = \mathbf{B} : \mathbf{C}$. גם כאן הקושי העיקרי הוא היישום במשימות, ולא בהבנה הפשוטה של היסודות הנלמדים.
יש לשים לב שבגלל הכללים השייכים לסדר פעולות חשבון, קושי נוסף ייחודי הוא החובה לכתוב סוגריים כאשר כופלים ביטוי שהוא סכום או הפרש. למשל, אם $\boldsymbol{x} - 1 = 3$ אז $4 \cdot (\boldsymbol{x} - 1) = 12$, ולא $4 \cdot \boldsymbol{x} - 1 = 12$, כפי שכותבים חלק מהתלמידים באופן אינטואיטיבי. כדי להדגיש קושי זה, אפשר להציע משימות כך:
נתון $\boldsymbol{x} - 1 = 3$, האם לפי תכונות השוויון $4 \cdot \boldsymbol{x} - 1 = 12$ או $4 \cdot (\boldsymbol{x} - 1) = 12$? האם אפשר לעשות גם כך וגם כך? מדוע?

משימות

122 – 127 במשימות אלה אפשר להשתמש בייצוגים שונים (למשל, מאזניים) כדי להמחיש את הנתונים. בכל זאת יש להקפיד על כתיבת שוויונות ועל שימוש בתכונות השוויון (ראו את הדוגמה שלפני תרגיל 124).

128 – 134 בתרגילים אלה התלמידים ישתמשו בתכונות השוויון בלי להשתמש בייצוגים. המשימות מופשטות יותר, ומופיעים בהן משתנים, שברים, מספרים עשרוניים וסוגריים. בתרגיל 131 חלק מהתלמידים אינם רואים מיד ש- $5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, ולכן הם מתקשים להבין שאותה פעולת כפל בוצעה בשני אגפי השוויון. יש לעזור להם להגיע למסקנה זו.

לומדים (עמ' 217)

בחלק השני של השיעור מתמקדים בקושי נוסף המצוי במשוואות של כפל וחילוק: כתיבת שברים במקום חילוק עם סימן ":". לכתיבה זו יתרונות וחסרונות, ובין חסרונותיה: קשה יותר לזהות את הפעולה ההפוכה לפעולה נתונה המופיעה בשוויון (ראו דוגמאות שבקטע השיעור). לכן רצוי להסב את תשומת לבם של התלמידים לכך לפני שייגשו למשימות שבהמשך.

משימות

135 – 139 משימות אלה הן למעשה תרגילי פתרון משוואות על-ידי תכונות השוויון בכפל ובחילוק. יש לשים לב כי בחלק מהסעיפים במשימות 135 – 137 ערך הנעלם הוא שבר, ולא מספר שלם כמו ברוב הסעיפים. במשימות 138 – 139 יש לוודא שהתלמידים הבינו כי הפעולה שמאפשרת לבודד את הנעלם כאשר מקדם הנעלם הוא שבר מהסוג $\frac{1}{\boldsymbol{n}}$, היא כפל ב- $\boldsymbol{n}$, דבר שאינו אינטואיטיבי לתלמידים.

140 – 144 פתרון שאלות מילוליות בהקשר גאומטרי. כאמור, אפשר לגלות את התשובה הסופית באופן אינטואיטיבי, בלי להשתמש במשתנים. יש להקפיד על כתיבת שוויונות מתאימים ועל השימוש באוצר המילים הרלוונטי.

מיומנויות עמ' 220

בחלק זה מובאים ייצוגים מתחום ההנדסה להמחשת נושא פתיחת סוגריים או ביטוי אלגברי השקול לסכום מכפלות. התלמידים מגלים כי פתיחת סוגריים והוצאת גורם משותף הן שני הצדדים של השימוש בחוק הפילוג.

מוכנים להמשיך? עמ' 221

1. ב 2. א 3. ב 4. ג 5. ג 6. ג 7. א 8. א 9. ב 10. ג 11. ב

תרגילים נוספים עמ' 222

153 – 154 מומלץ להציע משימות אלה לאחר שהתלמידים למדו את המושג "כינוס איברים". כך הם יוכלו לפשט את הביטוי המתקבל בסעיף ב'.

153 $5 \cdot \boldsymbol{y} + 10 \cdot (20 - \boldsymbol{y}) = 200 - 5 \cdot \boldsymbol{y}$

154 $10 \cdot \boldsymbol{y} + 5 \cdot (20 - \boldsymbol{y}) = 5 \cdot \boldsymbol{y} + 100$

156 – 157 רצוי "להכריח" את התלמידים לכתוב שוויונות המתאימים לנתונים, ולא להסתפק בכתיבת התשובה הסופית. למשל, במשימה 152 אפשר לכתוב כך:

נסמן ב- $\boldsymbol{x}$ את המחיר של פחית קולה. לפי הנתונים מתקיים:

$$7 + \boldsymbol{x} = 12 \quad | - 7$$
$$\boldsymbol{x} = 12 - 7$$
$$\boldsymbol{x} = 5$$

161 ד החפץ היקר ביותר יכול להיות הגלובוס (שמחירו $\boldsymbol{a} + 20$) או הספרים (שמחירם $2 \cdot a$).
ניתן לתת לתלמידים לחפש באילו ערכים של $\boldsymbol{a}$ הגלובוס יקר יותר מהספרים. דרך אפשרית לענות על שאלה זו היא לכתוב שמחיר הספרים הוא $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}$. כך קל יותר להבין שאם $\boldsymbol{a}$ קטן מ- 20, הגלובוס יקר יותר; ואם $\boldsymbol{a}$ גדול מ- 20, הספרים יקרים יותר.

174 לפני שהתלמידים יתחילו לחפש את התשובה הנכונה, אפשר להראות להם שאין צורך בכתיבת שוויונות כדי להבין שהערך של $\boldsymbol{y}$ שמצא דוד שגוי. למשל, אם $\frac{5}{\boldsymbol{y}} = 4$, $\boldsymbol{y}$ חייב להיות גדול מ- 1, מכיוון שהמנה של 5 במספר הקטן מ- 1 גדולה מ- 5, קל וחומר מ- 4. לכן תשובתו של דוד (0.8) אינה יכולה להיות נכונה. אם התלמידים אינם מודעים לתכונות החילוק במספר גדול/קטן מ- 1, תרגיל זה מהווה הזדמנות טובה לדון בנושא.

ממשיכים בתרגול עמ' 213

175 למרות הניסוח הפשוט יחסית, שאלה זו יכולה להיות בעייתית, בעיקר לתלמידים המתקשים בהבנת הנקרא. אם יש צורך בכך, אפשר לבחור מספרים פשוטים כגון 2 ו- 3 ולפתור את הסעיפים השונים במספרים שנבחרו. אחר-כך אפשר לפתור אותם סעיפים עם המשתנים $\boldsymbol{a}$ ו- $\boldsymbol{b}$.

178 בשאלות ד' – ו', יש לוודא שהתלמידים אינם מתבלבלים בין שטח לבין היקף. שאלות ד' – ה' הן חישובי שטח, ושאלה ו' היא חישוב היקף. בשאלה זו הדרך הקצרה ביותר להגיע לתשובה הנכונה היא לכתוב $2 \cdot (3 \cdot \boldsymbol{a} + 3 \cdot \boldsymbol{b}) = 6 \cdot \boldsymbol{a} + 6 \cdot \boldsymbol{b}$. אבל ייתכן שחלק מהתלמידים ירצו לפתור את השאלה בדרך אחרת, למשל: $\boldsymbol{a} + 2 \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 2 \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} + 2 \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 2 \cdot \boldsymbol{b} = 6 \cdot \boldsymbol{a} + 6 \cdot \boldsymbol{b}$. אין לפסול שיטות חישוב אלטרנטיביות כשהן נכונות, אבל רצוי לציין מה הן השיטות המהירות יותר.

179 בשאלה זו אפשר לבקש מהתלמידים לכתוב ביטוי אלגברי המתאר את הממוצע של שני מספרים כלשהם $\boldsymbol{r}$ ו- $\boldsymbol{s}$, ולאחר מכן לבקש מהם לכתוב ביטוי אלגברי המתאר את הממוצע של שלושה מספרים כלשהם $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ו- $\boldsymbol{c}$. כך יהיה קל יותר לתלמידים להבין כיצד להתחיל לפתור את השאלה הנתונה.

180 לחלק מהתלמידים קשה להבין שמספר דו-ספרתי בו האות $\boldsymbol{a}$ מייצגת את ספרת היחידות, והאות $\boldsymbol{b}$ מייצגת את ספרת העשרות שווה ל- $10 \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$. אפשר לבקש מהתלמידים לכתוב תחילה ביטוי המתאר "$\boldsymbol{b}$ עשרות", ורק לאחר מכן לכתוב ביטוי המתאר "$\boldsymbol{b}$ עשרות ועוד $\boldsymbol{a}$ יחידות", שהוא המספר הנתון. אחר-כך פתרון שני הסעיפים של השאלה לא אמור להיות בעייתי.

181 – 185 בשאלות אלה יש לבקש מהתלמידים לייצג את הנתונים כדי להבין את המשימות הנתונות טוב יותר, גם אם הדבר אינו נדרש בפירוש בשאלות עצמן. עבודה זו היא הכנה טובה לפתרון שאלות מילוליות מורכבות יותר, שהתלמידים יעסקו בהן בפרק הבא.

190 נוסף על השאלה הנתונה, אפשר להציע חידות נוספות מסוגים אחרים או אפילו לעודד את התלמידים להמציא חידות דומות, אבל שונות.

דוגמה לחידה בנושא חישוב שתוצאתו קבוע:

- חשבו על מספר שלם;
- כפלו אותו ב- 2;
- הוסיפו 10 לתוצאה;
- חלקו את התוצאה ב- 2;
- חסרו את המספר שחשבתם עליו בהתחלה.

(התוצאה הסופית המתקבלת היא תמיד 5.)

חידות כמו זו מופיעות (באנגלית) באתר כגון http://www.java-gaming.com/game/6694/Magic_Gopher/

<u>הסוד</u>: המספר המתקבל בסוף החישובים תמיד מתחלק ב- 9, וכל הכפולות של 9 קשורות לאותו סימן.

לכן התוכנה "יודעת" איזה סימן קשור למספר המתקבל, אף על-פי שהיא אינה יודעת את המספר המתקבל עצמו.

היסטוריה עמ' 231

חשוב להדגיש לתלמידים את חשיבות השימוש באותיות כדי להכליל ולבטא חוקים וכן כדי לייצג מספרים.
המספרים הם לשימוש ספציפי, והאותיות משמשות להכללה.
הסימונים פלוס "+" ומינוס "–", הם סימוני קיצור להבעה מילולית ארוכה. המתמטיקה היא שפה, התקשורת הנוחה, הקצרה והמדויקת עוזרים להבין ולתקשר ביתר קלות. ההיסטוריה מוכיחה כי כל המצאה של סימון, ובעיקר ההמצאה של שימוש בביטויים אלגבריים, שינתה וקידמה את המתמטיקה.