

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

רקע

יחס הוא אחד המושגים הבסיסיים ביותר במתמטיקה. על המושג יחס מבוססים אין-ספור נושאים במתמטיקה: שברים, אחוזים, מידות עשרוניות, קנה-מידה, דמיון משולשים, פונקציות, פתרון משוואות, אחוזים, סטטיסטיקה, הסתברות, תכנון לינארי ועוד. חלק מהנושאים הללו נלמדים בבית הספר היסודי, בחלקם יעסקו התלמידים בפרקים הבאים, ואת חלקם הם ילמדו בשלב מאוחר יותר. בפרק זה, יחס הוא הבסיס להבנת המושג "פרופורציה" ולפיתוח חשיבה פרופורציונית. נוסף על כך, רוב הנושאים בגאומטריה קשורות ליחס בין גדלים. לדוגמה, היחס בין היקף המעגל לבין רדיוס המעגל הוא π .

לימוד הנושא "יחס" מקשר למעשה, בין נושאים רבים שנלמדו בעבר, ומהווה הזדמנות טובה לחזור על נושאים אלה ולהעמיק בהם.

יחס הוא גם כלי שימושי במדעים רבים (פיסיקה, כימיה, גיאוגרפיה, ארכיטקטורה, כלכלה ועוד), ובחיי היום-יום הוא כלי חשוב בתחום הצרכנות (השוואה בין מחירים, תכנון תקציב וזמן ועוד) אחת ממטרות לימוד הנושא, היא פיתוח חשיבה פרופורציונית אצל התלמידים הצעירים. מחקרים שונים מצביעים על כך שגם מבוגרים רבים מתקשים בחשיבה פרופורציונית. מדובר ביכולת להשתמש במושג יחס באופן נכון. לדוגמה, כאשר רוצים לדעת איזה משקה מכיל יותר חלב, משקה א' או משקה ב' - משקה א' מכיל 170 גר' מים ו-120 גר' חלב ומשקה ב' מכיל 70 גר' מים ו-20 גר' חלב. חשוב להבין שעל השאלה יש לענות באמצעות השוואה בין היחסים המתאימים, ולא על-ידי השוואה בין ההפרשים.

מהו יחס?

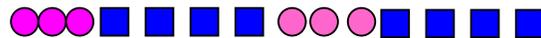
יחס הוא מצב הדדי (או קשר) בין מספרים או בין כמויות, המתבטא בקשר כפלי. היחס בין גדלים או בין מספרים, מראה פי כמה אחד משני המספרים גדול (או קטן) מהמספר האחר. במילים אחרות, ידיעת היחס בין גדלים מאפשרת להשוות ביניהם בעזרת מנתם. הגדרה זו של יחס מאפשרת להבין את הקשר בין יחס לבין שבר (או חילוק).

שברים הם הביטוי המתמטי של קשר היחס, לכן אפשר לבטא את תכונות היחס בעזרת התכונות המוכרות של השברים.

התכונה העיקרית של היחס: "אם כופלים אחד מהגדלים במספר חיובי, הגודל השני מוכפל באותו מספר." (לפעמים לוקחים תכונה זו של היחס כהגדרתו.)

שלושה רעיונות חשובים הם בסיס להבנת המושג יחס.

1. "לכל a יש b"



לכל 3 עיגולים יש 4 ריבועים

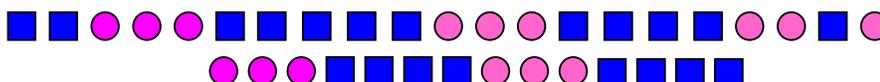
רעיון זה מוביל לשתי פעולות חשובות: השוואה בין מספרים בלי לדעת את ערכם, וחשוב גודלו של אחד המספרים כאשר ידועים גודלו של האחר והיחס ביניהם.

- אפשר להשוות בין מספרים או בין גדלים בלי לדעת את ערכם. אם היחס בין שני מספרים חיוביים גדול מ-1, המספר הראשון גדול מהמספר השני; אם היחס בין שני מספרים קטן מ-1, המספר הראשון קטן מהמספר השני; ואם היחס שווה ל-1, המספרים שווים. דוגמה: אם ידוע שהיחס בין x לבין y הוא $4 : 3$, אפשר לומר בוודאות $x < y$.
- אפשר לחשב את גודלו של אחד משני גדלים, אם נתון אחד מהם והיחס ביניהם. בצורה אינטואיטיבית כל תלמיד יכול לדמיון מצבים שבהם לכל מספר a של איברים מסוג אחד יש מספר b של איברים מסוג שני. דוגמה: אם ידוע שהיחס בין מספר העיגולים לבין מספר הריבועים הוא $4 : 3$, אפשר לחשב שאם יש 90 עיגולים, יש 120 ריבועים; ואם יש 48 ריבועים יש 36 עיגולים.

2. המספרים משתנים, אך הקשר נשמר

על-פי יחס נתון אפשר למצוא אין-סוף גדלים שהיחס ביניהם הוא היחס הנתון. דוגמאות:

- היחס בין עיגולים לבין ריבועים הוא אותו יחס בשני האיורים, גם אם הסדר שונה והמספרים שונים.
- אם נתון היחס בין רוחב המלבן לבין אורכו $(1:2)$, אפשר להסיק שאורך אחת הצלעות קטן פי שניים מאורך הצלע השנייה. אפשר לסרטט אין-סוף מלבנים העונים על דרישה זו, לדוגמה: 3 ס"מ ו- 6 ס"מ; 4.5 מ' ו- 9 מ'; 1.3 ק"מ ו- 2.6 ק"מ.



א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

$$3. \text{ הקשר בין שני גדלים הוא קשר כפלי } \frac{y}{x} = a, y = ax$$

רעיון זה מוביל למושג פרופורציה, לתכונותיה, ובעיקר להבנת יחס הפרופורציה הנלמד בחלק השני של הפרק.

שימוש ביחס הפרופורציה ובתכונות הפרופורציה מאפשר חישובים רבים. תכונות הפרופורציה:

$$\bullet \text{ } ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ והשוויונות הנובעים מכך הם } \frac{d}{c} = \frac{b}{a}, \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\bullet \text{ אם } k \text{ הוא יחס הפרופורציה: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ לכן } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k, a = kb, c = kd, d = \frac{c}{k}, b = \frac{a}{k}$$

• אם בשני גדלים פרופורציוניים a מתאים ל- a' , b מתאים ל- b' וכן הלאה, אפשר לומר שאלה תכונות הפונקציה הקווית: $(a + b)' = a' + b'$, $(a \cdot m)' = m \cdot a'$.

הערות:

❖ בתכנית הלימודים אין שימוש במונחים "איברים פנימיים" ו"איברים חיצוניים", המקובלים בספרות. השימוש בהם כאן נובע מהצורך להשתמש בקביעה ש"בפרופורציה מכפלת החיצונים שווה למכפלת הפנימיים", המלווה דורות של אנשי מתמטיקה.

❖ יחס הפרופורציה הוא בעצם הערך המשותף של שני היחסים שבפרופורציה, אך המונח "ערך היחס" או "מקדם היחס" אינו בתכנית הלימודים, לכן בספר לתלמיד נכתבו השוויונות:

$$d = \frac{bc}{a} \quad c = \frac{ad}{b} \quad b = \frac{ad}{c} \quad a = \frac{bc}{d}$$

הערה: המונח "יחס" בעברית קשור להרבה תחומים. במתמטיקה מדברים על הקשר בין שני גדלים - "היחס בין מספר הספרים למספר הילדים הוא 2 ל-3", ועל מספר עם או בלי כינוי, שהוא יחס הפרופורציה (הדורשת 4 מספרים), לדוגמה:

עם כינוי: "היחס בין דרך לכמות הדלק הוא 9 (ליטר ל-100 ק"מ)."
בלי כינוי: "היחס בין היקף הריבוע לצלע הוא 4".
זהו תרגום של המילה האנגלית Ratio.

במתמטיקה היחס מתבטא בשלוש מסגרות.

- **מסגרת המידות:** המספרים הם "מוחשיים", שכן משווים בין כמויות או בין מידות. במסגרת זו ליחס משמעות אינטואיטיבית (אם בקילוגרם ריבה יש 700 גרם פרות, ב-2 קילוגרמים יש 1,400 גרם פרות) לכן זו המסגרת שבה נלמד היחס בבית ספר יסודי.
- **מסגרת המספרים ה"מופשטים":** מסגרת זו מאפשרת יצירת קשרים בין נושאים והכללות. לדוגמה, הקשר בין שבר ליחס מאפשר להרחיב מונחים (למשל הרחבה וצמצום) ולבצע חישובים-הידועים בשברים - בהקשר ליחס. בפרק ה' נראה יישום נוסף: האחוז הוא יחס.
- **המסגרת הגרפית:** ייצוג גרפי של יחס ישר הוא קו ישר העובר דרך הראשית. תלמידים יחקרו את הקשר בין יחס לבין פונקציה קווית בפרק ד' של ספר זה.

נושא היחס יילמד בשני פרקים. בפרק הנוכחי עוסקים בהצגת המושג ותכונותיו, בהשוואה בין יחסים, בקשר בין יחס לבין שברים ולבין פרופורציה. בפרק ה' עוסקים בעיקר בחלוקת כמות לפי יחס נתון וביישומי יחס ופרופורציה.

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

הקשיים העיקריים שבהוראת הפרק

- **כתיבת היחס:** בעברית כותבים מימין לשמאל, ובמתמטיקה כותבים משמאל לימין. דוגמה: היחס בין מספר הבנים לבין מספר הבנות הוא 3 : 2. התלמידים צריכים להבין כי המספר 2 מתייחס למספר הבנים, ואילו המספר 3 מתייחס למספר הבנות. לעתים תלמידים מתקשים להבין שהמספר הכתוב משמאל לנקודתיים קשור למילה הכתובה מימין. הדבר אינו פשוט, ולכן צריך להרגיל את התלמידים לכתיבה ולקריאה של יחסים.
- אפשר לכתוב את היחס בצורת שבר. ייתכן שלתלמידים מסוימים הכתיבה בצורת שבר תעזור להתגבר על הבעיה, אך חשוב לסייע לתלמידים להבין את שתי צורות הכתיבה, כי הם ייתקלו בשתייהן במבחנים ובספרי הלימוד.
- **היחס הכתוב כשבר:** בבית הספר היסודי המונה והמכנה של שבר הם מספרים טבעיים. כאשר כותבים יחס כשבר, המונה או המכנה יכולים להיות מספרים עשרוניים. צורה זו של כתיבת היחס מהווה קושי נוסף בכל הקשור לחישוב בשברים.
- צורות התבטאות של היחס מעשירות את אוצר המילים של התלמידים ומאפשרות להם להבין את המושג, אולם הן גם מקור של קושי לחלק מהתלמידים: "מול כל 4 יש 5", "היחס הוא 5 : 4", "4 כנגד 5" - ביטויים אלה מבטאים קשר של אותו יחס.
- המושג **פרופורציה** מורכב, **שכן יש בו שוויון ושני יחסים**. כמובן, כמו כל מושג מורכב - קשה להפנימו.
- יש קושי מסוים בהבנת שני היבטי היחס: מחד גיסא היחס הוא **קשר** בין שני גדלים, והוא מושג מתמטי **אחד**, ומאידך גיסא הוא תוצאת **חישוב** הקשורה בשני גדלים מסוימים.
- ילדים בגיל זה מבינים היטב את היחס 2 : 1, אך מתקשים בהבנת יחסים מסובכים יותר, כגון 7 : 5.

מומלץ להקדיש לנושא כ- 12 שעות לימוד.

מושגים ומונחים

הפרש, מנה, שבר, כפולות, מחלקים, השוואה, מכפלה, סכום, הצבה, יחס, יחס מצומצם, גדול ב-, קטן ב-, גדול פי, קטן פי, יחסים שווים, יחסים לא-שווים, הרחבה, צמצום, גורם ההרחבה, גורם הצמצום, פרופורציה, גדלים פרופורציוניים, יחס הפרופורציה.

מטרות

התלמידים ידעו:

- א. לקבוע מהו היחס בין הגדלים של שתי קבוצות נתונות;
 - ב. לתאר קבוצות המתאימות ליחס נתון;
 - ג. לכתוב יחס בין קבוצות בצורה המקובלת בהתאם לתיאור מילולי;
 - ד. לכתוב יחס בין קבוצות נתונות בצורות שונות (לדוגמה, 3 : 2 או 6 : 4 או 18 : 12);
 - ה. לצמצם ולהרחיב יחסים;
 - ו. לקבוע - על-פי יחס נתון - איזו קבוצה גדולה יותר;
 - ז. לתאר יחס נתון כמנה ולתאר מנה כיחס;
 - ח. למצוא אפשרויות שונות לקבוצות המתאימות ליחס נתון;
 - ט. לקבוע גודל של קבוצה אחת על-פי גודל נתון של קבוצה אחרת ועל-פי היחס בין גודלי הקבוצות;
 - י. לקבוע אם יחסים שווים;
 - יא. למצוא יחס שווה ליחס נתון בעזרת טבלה;
 - יב. למצוא יחסים שווים בעזרת הרחבה וצמצום;
 - יג. לפתור בעיות מילוליות הקשורות ליחס;
 - יד. לזהות פרופורציה;
 - טו. לחשב איבר החסר בפרופורציה;
 - טז. לזהות גדלים פרופורציוניים
- (יחס ישר במקרים פשוטים, כאשר נתונים ערכים שונים של שני גדלים);
- יז. לחשב יחס של פרופורציה;
 - יח. להשלים טבלת פרופורציה.

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

השיעורים בספר הלימוד

מגלים ולומדים



א. יחס - מהו?, עמ' 1

מגלים



הפעילות הראשונה מובילה את התלמידים לעבודה בשני גדלים (המיוצגים בריבועים ובמשולשים) במקביל, כשם שעבדו בפונקציות בסוף כיתה ז' וכשם שהשתמשו במושג "לכלל". גם אם התלמידים אינם מגיעים לחוקיות בסעיפים א'-ג', בסעיף ד' תובהר להם הכוונה. בסעיף זה התלמידים כבר "מפעילים" את חישובי היחס על בסיס המספרים הנתונים ללא ידיעת המושג. הטבלה מסייעת לעבוד באופן שיטתי גם אם החוקיות אינה מובנת.

(א) ו- (ב) בכל דגם כנגד 3 ריבועים יש 4 משולשים.
(ג) בכל עיטור 16 משולשים ו- 12 ריבועים.

לומדים



הדגש הראשון בדיון צריך להיות על הקשר בין המילה "יחס" לבין משמעותו. המשפט "מול / כנגד ___ יש _____" יכול להיות הגדרה של יחס. הדגש השני הוא על כתיבת היחס בעזרת סימן החילוק: $\frac{\text{יש תלמידים}}{\text{יש שאלו למה אין סימן אחר, מיוחד, ומדוע משתמשים בסימן חילוק. התשובה לכך תינתן בשיעור ב', אך בכיתות החזקות אפשר לחזור לסעיף ד' של פעילות (2) ולשאלו: "כיצד מצאתם את התשובה?"$

מתרגלים

כל המשימות שיש בהן צורות, קשורות לזיהוי יחס. כאמור על מנת להקל את ניהול ההוראה חילקנו את המשימות:

א. למשימות שמומלץ להעביר בכיתה: משימות העוסקות בהיבטים העיקריים של המושג, כאן - היחס, והמפתחות את המיומנויות העיקריות: זיהוי, כתיבה, יישום בסיסי, הבנת משמעות המושג ועוד, לפי הנושא.

ב. למשימות לכיתה או לבית, שחלקן חוזרות על המשימות הניתנות בכיתה, עבור תלמידים שלא הפנימו את החומר בכיתה; ולמשימות נוספות העוסקות בהיבטים פחות מרכזיים להבנה המיידית, אך חשובים לתפיסה עמוקה יותר של היחס.

כאשר יש בסוגיה הערה או פרט שמצריכים הדגשה, מופיעה משימת יישום ורק לאחר מכן מופיעות משימות לבית.

מספר המשימות לכיתה לוקח בחשבון במידת האפשר את "הזמן כיתה". לכן חלק מהמשימות מיועדות להתבצע בעל-פה, בזמן שהמשימות לבית עשויות לדרוש יותר זמן עד לניהול "חקירות קטנות".

משימות לכיתה

1. (א) הציור והצביעה ממחישים לתלמידים את המחזוריות ואת היחס. (ב) היחס בין מספר החרוזים הלבנים לבין מספר החרוזים השחורים הוא 5 : 3.
2. הסעיפים הראשונים מזמינים את התלמידים לעבוד בשיטתיות: קודם מונים את האיברים, ובסעיפים הבאים קובעים את היחסים. זו הזדמנות לחזור על שמות הצורות ועל קשרי הכללה (מקבילית וריבוע הם מרובעים). יש 30 חלקים 15 עיגולים, 8 משולשים, 5 מרובעים, 2 משושים.
(ו) 2 : 1 (ז) 15 : 2 (ח) 30 : 8 (ט) 15 : 5 (י) 30 : 19. באם יש זמן, אפשר ליצור יחסים אחרים, כגון משולשים עם מילוי ומשולשים בלי מילוי (1 : 8).

בתרגילים 3 – 5 "מתרגמים" משפט מהשפה המדוברת לצורה המתמטית ולהפך, וכן מאיור למשפט בשפה המדוברת או לצורה המתמטית. יש לשים לב שבעברית קוראים מימין לשמאל ובצורה המתמטית - משמאל לימין, דבר שעלול לבלבל בכתיבת היחס ובהבנתו.

3. "תרגום" ממלל לצורה מתמטית. (א) 7 : 3 ; (ב) 3 : 7 ; (ג) 25 : 100 ; (ד) 600 : 200 ; (ה) 250 : 50 ; (ו) 1 : 0.75

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

4. "תרגום" מצורה מתמטית למלל. יש לשים לב מי מתייחס למי. א) היחס בין 6 ל-8 ; ב) היחס בין 4 ל-1 ; ג) היחס בין 8 ל-9 ; ד) היחס בין 1 ל-4 ;
5. "תרגום" משפט היחס לשפה מדוברת עוזר להבין את משמעות היחס. דוגמאות : א) מול כל מורה יש 30 תלמידים. ב) לכל 10 רופאים יש 3,000 תושבים. ג) לכל שני פקחים יש 5 רחובות.
6. קיימים הרבה קשרים בין גיאומטריה ליחס. היחס בין הצלע לבין ההיקף (4 : 1) הוא הפשוט יותר.
7. טענה ב' נכונה. יש לשים לב מי מתייחס למי. טענה א' היא היחס בין מספר הספרים לבין מספר המשקפיים.
8. היחסים שונים. תרגום למלל יכול לעזור. היחס 1 : 4 פירושו היחס בין 4 ל-1. דוגמה : להכנת עוגה מול כל 4 כוסות קמח יש כוס 1 של סוכר. היחס 4 : 1 הוא הפוך : היחס בין 1 ל-4. דוגמה : מול כל כוס 1 של סוכר יש 4 כוסות קמח.

בקטע "לומדים" שלאחר משימה זו מובהר שברוב המקרים $a : b \neq b : a$

9. א) בכיתה ז' רכשו את המיומנות של מדידה בסרגל. עתה משתמשים במיומנות זו למדידת אורכי הקטעים ולקביעת היחס בין אורכי הקטעים. אורכי הקטעים הם : 2, 4, 6, ו-7 ס"מ. בסעיף ח' אפשר לכתוב יחסים נוספים שונים. דוגמה : היחס בין אורך הקטע AB לבין אורך הקטע GH, או להפך : היחס בין אורך הקטע GH לבין אורך הקטע AB.

משימות נוספות לכיתה ולבית

10. יש לשים לב בין מי לבין מי היחס. היחס בסעיפים א' ו-ב' הפוך. בסעיף א' היחס הוא בין מספר העיגולים לבין מספר המלבנים. בסעיף ב' היחס הפוך. בסעיף ג' היחס הוא בין מספר המלבנים לבין סך כל הצורות.

	צירוף א'	צירוף ב'	צירוף ג'
א	4 : 2	6 : 6	12 : 6
ב	2 : 4	6 : 6	6 : 12
ג	2 : 6	6 : 12	6 : 18

11. התלמידים יפתרו את השאלה על-ידי ספירת הצורות. חשוב לשים לב לכתובת כיוון היחס.
12. א) ילדים : נשים ; ב) ילדים : צעצועים ; ג) מדפים : ספרים ; ד) מְחֻשְׁבִּים : עובדים.
7 : 12 ; 4 : 3 ; 300 : 8 ; 6 : 5
13. יש תלמידים שיכתבו כבר יחס מצומצם כגון 1 : 1 במקום 8 : 8, או 1 : 2 במקום 10 : 20.
א) 10 : 20 ; ב) 5 : 1 ; ג) 8 : 8 ; ד) 10 : 8 ; ה) 5 : 10 ; ו) 20 : 5.
14. התלמידים נחשפים לקשר בין שני גדלים - בלונים ופרחים - ללא מספרים מדויקים. סעיף ד' יקל את הבנת מנגנון היחס : אם ידועים את הקשר בין גדלים ואחד מהמספרים, אפשר לחשב את הגודל האחר.
א) אי-אפשר.
ב) דוגמה : 20 בלונים ו-8 פרחים.
ד) 6 פרחים.

15. יש לשים לב בין מי לבין מי היחס ולכיוון הכתיבה.
א) 5 : 12 ; ב) 12 : 5 ; ג) 17 : 12 ; ד) 5 : 17 ; ה) 12 : 17 ; ו) 17 : 5.
16. א) השלמת הריצוף עוזרת בהמחשה. ב) 4 : 2 ; ג) 2 : 4 ; ד) 32 משולשים הם פי 4 יותר ממספר המשולשים שבדגם. התלמידים יוכלו לשער שגם מספר הריבועים יגדל פי 4. בהמשך הפרק ילמדו זאת.

17. "תרגום" ממלל לצורה מתמטית. א) 6 : 3 ; ב) 1 : 6 ; ג) 3 : 1.

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

18. יש 3 גלילי נייר ו- 7 קישוטים, כלומר יש יותר קישוטים. בסעיפים הבאים יש לשים לב מי מתייחס למי. משפטים הנכונים: ב', ד', ה'.

19. יש תלמידים שיכתבו כבר יחס מצומצם.
א) $10 : 30$ ב) $10 : 30$ ג) $80 : 30$ ד) $10 : 80$ ה) $30 : 80$ ו) $10 : 80$.

20. א) אורך הקטע BD הוא 6 סנטימטרים. ביחס הנתון $3 : 2$, 2 מתייחס לקטע AB, ו- 3 מתייחס לקטע BD כיוון שאורך הקטע AB הוא 4 ס"מ, גדול פי 2 מהיחס 2, אורך הקטע BD הוא 6 סנטימטרים, גדול פי 2 מהיחס 3. לאחר שידועים אורכי הקטעים, קל לחשב את היחסים השונים, תוך כדי שימת לב מי מתייחס למי בכל סעיף; ג) $2 : 3$; ד) 10 ס"מ; ה) $4 : 10$; ו) $6 : 10$.

21. יש לשים לב בין מי לבין מי היחס ולכיוון הכתיבה.
א) $20 : 60$ ב) $60 : 80$ ג) $20 : 80$ ד) $60 : 20$.

ב. יחסים שווים, עמ' 9

מגלים

בפעילות מובא פירוש של היחס בחיי היום-יום: "כששומרים על הטעם בסלט הפירות, שומרים על היחס בין סוגי הפירות". מוצגות אותן כמויות של משמשים ושל תותים, המאורגנות בקבוצות שוות בצורות שונות. כך התלמידים רואים, כי היחס בין אותן שתי קבוצות (קבוצת המשמשים וקבוצת התותים) מוצג בדרכים שונות. אם את כל היחסים המתקבלים כותבים זה מתחת זה, רואים ביניהם קשרים של הרחבה ושל צמצום. התלמידים מבינים כי את אותו יחס אפשר לבטא בביטויים שונים.

לומדים

שיעור זה הוא שיעור מרכזי. כעת נלמד הקשר בין יחס לבין חילוק, ומוסברת ההגדרה "יחסים שווים". שיעור זה הוא הכנה לכתיבת היחס כשבר. חשוב לציין שיחס קיים בין כל שני מספרים חיוביים (שונים מ-0), כולל שברים ומספרים עשרוניים, אך בשלב זה הוחלט שלא להוסיף קושי על קושי, ורוב המספרים הם מספרים קטנים.
היחסים שווים אם הם מתקבלים זה מזה על-ידי הרחבה או על-ידי צמצום או על-ידי צירוף פעולות אלו. אחת הדרכים המובילה למסקנה הנכונה בהשוואה בין היחסים היא מציאת יחס מצומצם (כלומר לצמצם את היחס הנתון עד הסוף) לכל אחד מהיחסים הנתונים: אם מתקבל אותו יחס מצומצם, היחסים הנתונים שווים. דרך נוספת להשוות בין יחסים היא לכתוב כל יחס בצורת שבר ולבדוק אם השברים שווים. אוצר המילים הקשור ליחס הוא האוצר המילים של החילוק (יחס הוא מנת חילוק) ושל השברים (יחס הוא שבר מצומצם).

מתרגלים

22. יש למצוא תחילה את היחסים בכל האיורים. באיורים א' ו- ג' היחס שווה 2 : 1.

23. היחס המצומצם בכל הסעיפים הוא 3 : 1.

24. היחס אינו שווה. בכיתה ח'1 היחס המצומצם הוא 5 : 2. בכיתה ח'2 היחס המצומצם הוא 3 : 1.

25. באמצעות מציאת היחס המצומצם אפשר להשוות בין היחסים. היחסים השווים הם א', ו' ו-ט', והיחס המצומצם הוא: 2 : 1. ב-ב' וב-ד', היחס המצומצם הוא 3 : 1. בסעיפים ה', ז' ו-ח' היחס המצומצם הוא: 3 : 2. ליחס ג' 12 : 5, אין יחס שווה.

26. א) 4 : 3 ב) 2 : 1 ג) 7 : 6 ד) 5 : 1 ה) 1 : 4 ו) 2 : 1.

27. א) 2 : 3 ב) 5 : y ג) x : y ד) 5 : x · 3 ה) 1 : 5 ו) t : 3.

28. א) 4 ניצחונות. 6 משחקים הם $\frac{1}{8}$ מ- 48 משחקים, 4 ניצחונות הם $\frac{1}{8}$ מ- 32. ב) 3 : 2.

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

29. (א) שני מכלים של סוכר הם 24 כוסות, פי 8 יותר מהכמות שבמתכון. כמות הקקאו המתאימה היא 8 כוסות שהן $\frac{2}{3}$ מכל הקקאו. (ב) היחס של מירב לא שווה ליחס הנתון. (ג) היחס של רוני הפוך מהיחס הנתון.
30. אפשר לתת כמה הסברים. דוגמה: היחסים הנתונים אינם יחס מצומצם זה של זה. (שני היחסים הנתונים – מצומצמים) היחס הראשון קטן מ-1, השני גדול מ-1.
31. כן. שני היחסים שווים ל-1 : 2.
32. המיץ של יהודה מתוק יותר. במיץ של יהודה היחס בין המים לבין התרכיז הוא 4 : 7, במיץ של שלומי היחס בין המים לבין התרכיז הוא 5 : 9. 4 : 7 > 5 : 9, כלומר אצל שלומי יש יותר מים באופן יחסי לכמות התרכיז.
33. בחבילת סכו"ם מספר הסכינים, המזלגות והכפות זהה. כאשר מדובר בסכו"ם ל 12 איש, היחס הוא 12 : 12 או 1 : 1. כאשר מדובר בסכו"ם ל-6 אנשים או 24, היחס המצומצם נשאר 1 : 1.
34. היחסים שווים. היחס המצומצם בשתי השרשראות הוא 3 : 4.
35. יש לספור תחילה את העיגולים הצבועים והלא-צבועים וכן לגבי הריבועים. יש לשים לב באילו יחסים מדובר בכל סעיף. (א) 12 : 8 ; 3 : 2 ; (ב) 20 : 8 ; 5 : 2 ; (ג) 20 : 12 ; 5 : 3 ; (ד) 20 : 10 ; 2 : 1 ; (ה) 10 : 4 ; 5 : 2 ; (ו) 10 : 10 ; 1 : 1.
36. (ב) דוגמאות: 4 : 6 ; 6 : 9 ; 8 : 12.
37. (א) המספר הקטן הוא $\frac{1}{8}$ מהמספר הגדול. (המספר הגדול גדול פי 8 מהמספר הקטן.) (ב) יש הרבה מאוד אפשרויות. דוגמאות: 2 ו-16, 3 ו-24.
38. (א) 20 : 20 או 1 : 1 ; (ב) 25 : 20 או 5 : 3 ; (ג) 10 : 30 או 1 : 3 ; (ד) 25 : 20 או 5 : 4 ; (ה) 15 : 20 או 3 : 4 ; (ו) משפטים 1, 3 ו-5 נכונים, משפטים 2 ו-4 אינם נכונים.
39. ההקטנה של ניר שומרת על היחס, האורך והרוחב קטנו באותו יחס. בהקטנה של גיל הרוחב נשאר כפי שהיה, ורק האורך קטן.
40. בסעיף א' התלמידים יכולים לבחור מחיר כרצונם (רצוי מחיר הגיוני), בסעיף ב' מחשבים את מחיר הכרטיס לילד לפי הבחירה בסעיף א' והיחס הנתון. (ג) היחס הפוך. היחס בין המחיר לילד לבין המחיר למבוגר הוא 5 : 3.
41. היחס אינו שווה. בתמונת הפרח יחס ההגדלה הוא 4 : 5. בתמונת הספר היחס הוא 10 : 13.
42. היחס המצומצם בכל המסיבות שווה, והוא 3 : 2.
43. היחס לא נשאר. ההפרש בין הגילים נשמר. דוגמה אם היום אהרון בן שנה, אביו בן 25. בעוד שנה יהיה אהרון בן שנתיים, ואביו בן 26, היחס המצומצם הוא 1 : 13.

ג. צורות כתיבה של יחס – יחס ויחידות, עמ' 15



- בפעילות הראשונה מזכירים את העובדה ששבר וחילוק הם שתי דרכים לבטא אותה מציאות. יש תלמידים הסבורים שתוצאה של חילוק היא "מספר" וששבר אינו נחשב "מספר". בפעילות השנייה שני המלבנים דומים, כלומר מידותיהם הן באותו יחס (3,4). התלמידים מתבקשים להשוות בין שני יחסים: בסעיף א' היחס בין המידות של כל מלבן הוא 4 : 3, ובסעיף ב' היחס בין אורכי המלבנים לבין רוחביהם הוא 2 : 1.

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

התלמידים פתרו בבית-הספר היסודי בעיות כמו בעיית התנועה שבפעילות השלישית, אך הפעם הם קושרים את המצב לשבר וליחס: 48 דקות הם $\frac{4}{5}$ של שעה. הפעילות מהווה הכנה לסוגיית "יחס ויחידות מידה" המופיעה בהמשך (עם התשובה) ללא פעילות גילוי, על מנת שלא לעצור את מהלך הסברים.

לומדים



התלמידים כבר למדו ששבר הוא ביטוי של מנה (אך רבים מהם אינם מבינים את ההשלכות של הדבר) משתמשים בהסקה הגיונית כדי להצדיק את כתיבת היחס בצורת שבר: יחס הוא ביטוי של מנה וגם שבר הוא ביטוי של מנה, לכן אפשר לכתוב יחס בצורת שבר. לפיכך תכונות השבר מבטאות את תכונות היחס. כאמור ברקע, הקושי נמצא בהרחבת תחום המספרים לכתובת השבר.

מתרגלים

44. המעבר בין צורות הכתיבה השונות של היחס עוזר להפנמת המושג. א) היחס בין 50 ל-40 הוא 40 : 50, כלומר $\frac{50}{40}$; ב) היחס בין 3 ל-2 הוא $\frac{3}{2}$; ג) היחס בין 1 ל-0.5 הוא $\frac{1}{0.5}$; ד) היחס בין 0.2 ל-2 הוא

$$2 : 0.2; \text{ ה) היחס בין } 60 \text{ ל-} 15 \text{ הוא } \frac{60}{15}; \text{ ו) } 0.4 : 4 = \frac{0.4}{4}$$

45. א) 12 : 2 או $\frac{2}{12}$; ב) 20 : 5 או $\frac{5}{20}$; ג) 200 : 150 או $\frac{150}{200}$; ד) 16 : 4 או $\frac{4}{16}$; ה) 28 : 7 או $\frac{7}{28}$.

$$\text{ו) } 20 : 8 \text{ או } \frac{8}{20}$$

46. א'.

47. א'.

48. א) יש הרבה מאוד אפשרויות. דוגמאות: 14 : 2, 21 : 3. ב) גדול מ-a פי שבעה.

49. א) נכון, יחס מצומצם; ב) נכון, צורות כתיבה שונות של יחס; ג) נכון, יחס יכול לבטא פי כמה גדול נתון אחד ממשנהו; ד) היחס בין 1 ס"מ ל-1 מטר הוא 1 : 100. אפשר לבקש מהתלמידים להסביר מדוע ההיגד אינו-נכון (היחס הכתוב 1 : 100 הוא בין 1 מטר ל-1 ס"מ);

50. כדי שאפשר יהיה להשוות, יש לכתוב כל יחס בצורתו המצומצמת. היחסים השווים הם א', ה', ח' ו-י', וכולם 7 : 4. היחסים ב', ו' ו-ז' שווים 1 : 7. ג', ד', ט', ו-י"א שווים 1 : 1.

51. א) $\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$. ב) בין 5 ל-20. ג) בין 9 ל-30. ד) דוגמה: בין 8 ל-28, כי $\frac{4}{14} = \frac{2}{7} = \frac{8}{28}$. ה) דוגמה: בין

ל-25, כי $\frac{10}{5} = \frac{2}{1} = \frac{50}{25}$. ו) דוגמה: בין 50 ל-50, כי $\frac{100}{10} = \frac{10}{1} = \frac{500}{50}$. ז) דוגמה: בין 60 ל-600, כי

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = \frac{60}{600}$$

לומדים: יחס ויחידות מידה



כאמור, קטע שיעור זה שעניינו יחידות מידה, מופיע בלי פעילות גילוי. בתיאוריה מדובר על חילוק כינויים. ישנם שלושה סוגי יחס:

א) יחס בין מספרים בלי כינוי - ליחס אין כינוי. דוגמה: היחס בין 12 ל-4 הוא 3.

ב) יחס בין גדלים או כמויות בעלות אותו כינוי - ליחס אין כינוי.

דוגמה: היחס בין 12 מטרים לבין 4 מטרים הוא 3.

ג) יחס בין גדלים או כמויות בעלות כינוי שונה - ליחס יש כינוי שהוא מנת הכינויים.

דוגמה: אם נוסעים 120 ק"מ בשעתיים, היחס בין הדרך לבין הזמן הוא המהירות שכינויה "קילומטרים בשעה" (קמ"ש).

בקטע שיעור זה מטפלים רק בסוג השני של יחס עם דגש על יחידות זמן.

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

מתרגלים

52. א) כן. 1 : 1000. ב) כן 1 : 100
53. א) 1000 : 1. ב) 2 : 20. ג) 10 : 5. ד) 10 : 500
54. 1000 : 1
55. היחס הוא בין המספרים המבטאים אותו פרק זמן ביחידות שונות.
א) 60 : 1. ב) 60 : 1 ג) 3600 : 1
56. מאחר שאורך היום שווה לאורך הלילה, אורכו של כל אחד מהם הוא 12 שעות. ייתכן שיהיה צורך להזכיר לחלק מהתלמידים, שביממה 24 שעות, בשעה 60 דקות, ובדקה 60 שניות.
א) 12 : 1. ב) 1 : 60. ג) 1 : 60. ד) 1 : 12. ה) 60 : 1. ו) 60 : 1. ז) 2 : 1. ח) 60 : 5 = 12 : 1. ט) 60 : 5 = 12 : 1. היחסים השווים הם: א' ו-ח'. ב' ו-ג'. ה' ו-ו'. אפשר לדון בשאלה מדוע היחסים שווים. לדוגמה, בסעיפים ב' ו-ג' היחס בין שעה לדקה שווה ליחס בין דקה לשנייה, כל יחידה מחולקת ל 60.
57. הטעות הנפוצה היא לא לכפול את החלק השברי (10 וחצי במקום 15 שעות)
א) 15 שעות ב) 18 שעות
58. 60 סיבובים.
59. חזרה על צמצום והרחבה של שברים. ישנם תלמידים שעשויים לפסול שברים גדולים מ-1. הסעיפים ז' ו-ח' מהווים חידוש לכתיבת יחס בין מספרים עשרוניים בעזרת שבר. בסעיף ז' אפשר להנחות את התלמידים בעזרת השאלה: "כאשר כופלים 0.5 ב-4 מקבלים 2, האם כאשר כופלים 0.75 ב-4 מקבלים 3?" כן: א', ג', ז', ח'; לא: ב', ד', ה', ו'.
60. דוגמה $\frac{3}{6} = \frac{0.5}{1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
61. $\frac{3}{15} = \frac{0.5}{2.5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
62. לדוגמה: 9 : 3 1.2 : 3.6 30 : 10
63. לדוגמה: $\frac{3}{12} = \frac{0.5}{2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
64. א) 1 : 3. ב) 1 : 8
65. א) 8 : 1. ב) 1 : 4
66. יחס בין מספרים מעורבים. התלמידים יכולים לכתוב את המספרים כמספרים עשרוניים 1.5 ו-0.75 ולהגיע ליחס 1 : 2. ב) דוגמאות: 2 כוסות חלב וכוס קמח, 1 כוס חלב וחצי כוס קמח, 5 כוסות חלב ו-2.5 כוסות קמח.
67. לא. הטעות הנפוצה היא לחשוב שהיחס בין ריבועי מספרים שווה ליחס בין המספרים.
68. 120 : 90 או 4 : 3
69. א) 60 : 20. ב) 80 : 60. ג) 80 : 20
70. כדי שאפשר יהיה להשוות, יש לכתוב כל יחס בצורתו המצומצמת. היחס המצומצם בשתי השכבות הוא 5 : 3.

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

71. א) היחס בין מספר כפות מיץ הלימון לבין מספר כפות השמן הוא 2 ל-5, כלומר 5 : 2 ; ב) $\frac{2}{5}$; ג) מספר

כפות מיץ הלימון מהווה $\frac{2}{5}$ ממספר כפות השמן.

72. היחס הוא 20 : 15 או 4 : 3.

73. א. היחס בין מספר כוסות נוזלים (שמן ומיץ) לחומרים המוצקים (סוכר וקמח) הוא 1 : 1.
ב. רבע מהנפח של הבצק. זו הזדמנות לדון על ההבדל בין משקל לנפח. אפשר למלא כוס של 200 מ"ל בכ- 320 גרם סוכר או בכ- 160 גרם קמח או בכ- 225 גרם שמן או בכ- 200 גרם מיץ תפוזים.
הקמח "כבד" פי 2 יותר מהסוכר.

ד. פרופורציה: הגדרה ותכונות עמ' 22

מגלים

התלמידים יודעים להרחיב ולצמצם שברים, כאשר גורם ההרחבה או הצמצום הוא מספר טבעי. המטרה של שלוש הפעילויות הראשונות היא להוביל את התלמידים להכליל ידע זה למספרים עשרוניים.

1. בפעילות הראשונה יש להניח שהתלמידים יתייחסו לכל יחס כאילו הוא שבר, ויצמצמו אותו ל- $\frac{1}{5}$,

כי אין גורם הרחבה הנראה לעין.

2. התשובה מידית. תכונת ההעברה של השוויון תקפה גם בשוויון בין יחסים.

3. הפעילות תפתיע את התלמידים. הם יגלו שלכל שני טורים שהם יבחרו, הם יקבלו את השוויון $ad = bc$.

לומדים

כעת מוצגת הפרופורציה, ונלמדת והתכונה העיקרית שלה. ההסברים לנכונות התכונה, המיועדים לתלמידים החזקים, מופיעים ב"העמקה" בסוף הפרק, ואפשר לסכם את השיעור ללא הסברים אלה.

להבדיל מיחס, פרופורציה מורכבת מארבעה מספרים (גם אם לא רואים את המספר 1 כאיבר בפרופורציה).

לדוגמה, הביטוי $7 : 1 = x : 3$ הוא פרופורציה. יש יחס בין 4 ו-8, אך הם אינם בפרופורציה.

כאמור ברקע, בתכנית הלימודים אין שימוש במונחים "איברים פנימיים" ו"איברים חיצוניים". אוצר מילים זה מאפשר הכללה ויצירת דמות מנטלית נוחה לזכירה.

חשוב שהתלמידים יבינו שהשוויון $ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ מתקיים בשני הכיוונים.

אם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, אז $ad = bc$,

ואם $ad = bc$ אז $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

תכונה זו מאפשרת בהמשך אין-ספור דרכי חישוב.

ההסברים על תכונת הפרופורציה מבוססים על תכונות השוויון ועל צמצום שברים.

מתרגלים

74. א) 2 ו-13 הם האיברים החיצוניים, 3 ו-10 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה. ב) 4 ו-12 הם

האיברים החיצוניים, 3 ו-16 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה. ג) y ו-25 הם האיברים

החיצוניים, 5 ו-16 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה. ד) 2 ו- x הם האיברים החיצוניים, 7 ו-16

הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה.

75. א) 7 ו-12 הם האיברים החיצוניים, 21 ו-4 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה. ב) 14 ו-3 הם

האיברים החיצוניים, 2 ו-21 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה. ג) 20 ו-40 הם האיברים

החיצוניים, 80 ו-10 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה. ד) 30 ו-2 הם האיברים החיצוניים, 120

ו-0.5 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה. ה) 1 ו-25 הם האיברים החיצוניים, 5 ו-5 הם האיברים

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

הפנימיים של הפרופורציה. ו) 100 ו-17.5 הם האיברים החיצוניים, 175 ו-10 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה. ז) 2 ו-48 הם האיברים החיצוניים, 84 ו-1 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה.

76. 15 ו-0.2 הם האיברים החיצוניים, 3 ו-1 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה. ב) 2 ו-4.1 הם האיברים החיצוניים, 2 ו-1 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה. ג) y ו-4 הם האיברים החיצוניים, 1 ו-3 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה. ד) x ו-1 הם האיברים החיצוניים, 5 ו-1 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה.

77. מומלץ לבקש מכל תלמיד לומר את הביטוי הכי מובן בשבילו.

78. דוגמה: א) $\frac{30}{10} = \frac{3}{1}$ 30 ו-1 הם האיברים החיצוניים, 10 ו-3 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה.

ב) $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ 5 ו-8 הם האיברים החיצוניים, 4 ו-10 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה.

ג) $\frac{24}{36} = \frac{6}{9}$ 24 ו-9 הם האיברים החיצוניים, 36 ו-6 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה.

ד) $\frac{7}{28} = \frac{6}{24}$ 7 ו-24 הם האיברים החיצוניים, 28 ו-6 הם האיברים הפנימיים של הפרופורציה.

79. דוגמה: $\frac{10}{30} = \frac{4}{12}$; $\frac{12}{15} = \frac{8}{10}$; $\frac{60}{30} = \frac{8}{4}$

80. דוגמה: א) $\frac{0.25}{10} = \frac{1.25}{50}$ ב) $\frac{2.5}{5} = \frac{18}{36}$ ג) $\frac{0.3}{3} = \frac{2.1}{21}$ ד) $\frac{1}{4} = \frac{1.2}{4.8}$

81. יש להניח שתלמידים רבים יגידו: "מחלקים את שני המכנים ב-4". פעולה זו אינה מבטיחה שמירה על השוויון. התשובה הפורמאלית: "כופלים כל שבר ב-4" מבטיחה שערך השבר בכל אגף נשמר. לפיכך השוויון המתקבל מתקיים.

82. בסעיף א' הפרופורציה מתקיימת, ובסעיפים ב' ו-ג' הפרופורציות לא מתקיימות. מומלץ להציע

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ או } ad = bc$$

83. בסעיפים א', ג' ו-ה' הפרופורציה לא מתקיימת, בסעיפים ב', ד', ו', ז' ו-ח' הפרופורציה מתקיימת.

84. א) מחלקים את שני האגפים ב-d. ב) מחלקים את שני האגפים ב-a. ג) משתמשים בחוק החילוף ואחר-כך מחלקים את שני האגפים ב-c. ד) משתמשים בחוק החילוף ואחר-כך מחלקים את שני האגפים ב-c.

85. השוויון מתקיים, המכפלה של כל אחד מהאגפים היא 36. א) דוגמה: $\frac{9}{3} = \frac{12}{4}$

86. א) האיברים החיצוניים הם 4 ו-18. האיברים הפנימיים הם 12 ו-6. ב) $12 \cdot 6 = 72$. $18 \cdot 4 = 72$ ג) הפרופורציות מתקיימות. אפשר להציב את המספרים ולחשב.

87. א) הפרופורציה מתקיימת. אם $\frac{3}{5} = \frac{15}{25}$, אז $3 \cdot 25 = 5 \cdot 15$. לפי חוק החילוף של הכפל $3 \cdot 25 = 25 \cdot 3$,

וגם $5 \cdot 15 = 15 \cdot 5$ אפשר לומר ש $15 \cdot 5 = 25 \cdot 3$. מכפלת האיברים החיצוניים שווה למכפלת האיברים הפנימיים, לכן קיימת הפרופורציה $\frac{25}{5} = \frac{15}{3}$

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

88. א) $a \cdot d = d \cdot a$ וגם $b \cdot c = c \cdot b$ לכן אפשר לומר ש $d \cdot a = c \cdot b$. מכפלת האיברים החיצוניים שווה

למכפלת האיברים הפנימיים, לכן קיימת הפרופורציה $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (ב) כן.

89. א) ההסבר של שמעון דומה להסברים הקודמים. אם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, אז $a \cdot d = b \cdot c$. לפי חוק החילוף של

הכפל $a \cdot d = d \cdot a$, לכן אפשר לומר ש- $d \cdot a = b \cdot c$. מכפלת האיברים החיצוניים שווה למכפלת

האיברים הפנימיים, לכן קיימת הפרופורציה $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (ב) כן.

90. כן. מכפלת האיברים החיצוניים שווה למכפלת האיברים הפנימיים בשתי הפרופורציות.
 $16 \cdot 3 = 4 \cdot 12 = 48$

מטרת המשימות 91 - 95 היא לפתח מיומנות שימוש בביטויים שקולים הנובעים מאותה פרופורציה.

מומלץ לעודד את התלמידים להשתמש בתכונת הפרופורציה: אם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, אז $a \cdot d = b \cdot c$.

כל הפרופורציות מתקיימות, לכן בכל תרגיל אפשר לכתוב את הפרופורציות $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ או $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ או $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

96. נכון: א' ו- ג'. לא נכון: ב' ו- ד'.

ה. מציאת המספר החסר בפרופורציה, עמ' 29

חשוב לדעת למצוא את המספר החסר בפרופורציה מכמה סיבות.

- זהו כלי הכרחי בשלב הסופי של פתרון משוואות.
- זהו אמצעי חישוב יעיל במיוחד בחישובים בחי היום-יום (לדוגמה, בהשוואת מחירים).
- זוהי אחת המיומנויות הבסיסיות לפיתוח תובנה מספרית.

מגלים

הפעילויות מתבססות על גילוי חוקיות בלוחות שתלמידים כבר ראו בכיתה ז', אך ההקשר אחר. המטרה הוא להראות שאם נתונים שלושה איברים בפרופורציה, אפשר למצוא את האיבר הרביעי בה בכמה דרכים.

1. בפעילות הראשונה נתונים שלושה לוחות הבנויים לפי אותו חוק. יש למצוא את החוק וליישם אותו בשני לוחות נוספים.

כדי לקבל את המספר בטור הימני כופלים את המספר בטור השמאלי ב- 3.

כדי לקבל את המספר בשורה השנייה כופלים את המספר בשורה הראשונה ב- $\frac{3}{4}$.

ב. $b = 18$ $a = 15$.

2. בפעילות השנייה משתמשים בדרכי חישוב שנמצאו בפעילות א', אך בלי מסגרת הלוחות.
(א) 4. (ב) 42. (ג) 20. (ד) 44.

3. אף-על-פי שקנה-מידה יילמד בפרק ו', יש כאן שימוש בפרופורציה שיש לה משמעות.
3 סנטימטרים מייצגים 15 קילומטר.

לומדים

הדרך למציאת המספר החסר בפרופורציה תלויה בסוג המספרים. לכן נוסף על השימוש בתכונות הפרופורציה (שקיימות תמיד) המוצג בחלק הראשון, מוסבר, בחלק השני (עמ' 31) השימוש בתכונות השברים, שיעיל ביותר במקרים מסוימים. חשוב לאפשר לתלמידים לבחור הדרך המתאימה להם.

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

מתרגלים

97. א) $x = 12.6$; ב) $z = 10.8$; ג) $t = 7$; ד) $v = 3$; ה) $x = 0.875$.

98. א) $x = 54$; ב) $x = 16$; ג) $x = 3$; ד) $x = 5$; ה) $x = 15$; ו) $x = 38$.

99. מומלץ להשתמש במחשבון. א) $x = 14.4$; ב) $x = 88$; ג) $x \approx 0.433$; ד) $x = 1.2$.

100. 15 ק"ג הם פי 5 יותר משלושת הקילוגרמים הנתונים. לכן גם המחיר גבוה פי 5 מהמחיר הנתון (17 ש"ח),

$$\frac{3}{17} = \frac{15}{85} \text{ ש"ח. כלומר המחיר הוא 85 ש"ח.}$$

101. 48 חבילות דפים. $\frac{50}{40} = \frac{60}{48}$.

102. 14.4 ש"ח. $\frac{10.8}{9} = \frac{14.4}{12}$.

103. א) ב-1.5 ; ב) ב-4.5.

104. א) $x = 36$; ב) $z = 45$; ג) $t = 6$; ד) $v = 12$.

105. א) $x = 150$; ב) $z = 24$; ג) $t = 24$; ד) $v = \frac{1}{6}$.

106. א) $x = 9$; ב) $y = 2.5$; ג) $t = \frac{4}{3}$; ד) $z = 6$.

107. א) להכנת 4 מנות דרוש 1 ק"ג תפוחי אדמה. להכנת 24 מנות דרושים 6 קילוגרמים של תפוחי אדמה. להכנת 40 מנות דרושים 10 קילוגרמים של תפוחי אדמה. ב) 10 מנות.

108. א) 10 : 4 או $\frac{4}{10}$; ב) 35 ק"ג. $\frac{4}{10} = \frac{14}{35}$.

109. א) $x = 12.5$; ב) $x = 0.5$; ג) $y = 5$; ד) $z = 5.4$.

110. כנרת בת 35. $\frac{2}{7} = \frac{10}{35}$.

111. 574 מ'.

112. 98.7 ש"ח. $\frac{70.5}{5} = \frac{98.7}{7}$.

113. 40 ש"ח. $\frac{96}{12} = \frac{40}{5}$.

114. יש לשים לב ליחידות השונות. רוחב הדגם הוא 15 ס"מ. $\frac{2800}{600} = \frac{70}{15}$.

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

$$115. 320 \text{ ק"מ} = \frac{120}{1.5} = \frac{320}{4}$$

$$116. 166.6 \text{ ש"ח} = \frac{71.4}{3} = \frac{166.6}{7}$$

$$117. 105 = \frac{7}{10} = \frac{105}{150}$$

$$118. 18 \text{ ק"מ} = \frac{9}{2} = \frac{18}{4}$$

$$119. (א) 135 \text{ מ"מ} = \frac{12}{54} = \frac{30}{135}; (ב) 60 \text{ שורות} = 29.7 \text{ ס"מ} = \frac{12}{54} \text{ אם נוריד את השוליים מלמעלה}$$

$$\frac{54}{12} = \frac{270}{60} \text{ ומלמטה, יישאר גובה דף של } 27 \text{ ס"מ שהם } 270 \text{ מ"מ}.$$

$$120. (א) כן. $\frac{120}{100} = \frac{150}{125}$; (ב) כן. $\frac{100}{125} = \frac{120}{150}$; (ג) לא. $\frac{80}{50} \neq \frac{100}{50}$; (ד) $1 : 1 = \frac{50}{50} = \frac{1}{1}$$$

$$(ה) כן. $\frac{3}{150} = \frac{2}{100}$; (ו) $\frac{150}{345} = \frac{10}{23}$; (ז) $\frac{100}{180} = \frac{5}{9}$$$

ו. גדלים ביחס ישר, עמ' 35

מגלים

המושג "יחס הפרופורציה" הוא מושג בסיסי במתמטיקה. אפשר להדגים מהו יחס הפרופורציה, בשני סוגים: בגאומטריה ובחיי היום-יום.

1. בגאומטריה: יחס הפרופורציה הוא מספר בלי כינוי: היקף משולש שווה-שוקיים גדול פי 3 מצלעו.
2. בחיי היום-יום: ביחס בין מחיר מלפפון לבין משקלו, יחס הפרופורציה הוא 1.25 ש"ח לקילו. יחס הפרופורציה במהירות הוא 90 ק"מ לשעה.

לומדים

התלמידים נחשפים למושג המתמטי "יחס ישר". בשיעור זה מכינים את התלמידים לשאלות המילוליות הקשורות לפרופורציה, ולחישובים הנדרשים בהן. טבלת היחס היא ייצוג נוח הן לזיהוי גדלים פרופורציוניים והן לחישובים. רואים בעזרתה שהיחס הוא הערך של גודל המתאים ל-1 בגודל הפרופורציוני לה.

מתרגלים

$$121. (א) $\frac{1}{4}$; (ב) 3;$$

$$122. כן. היחס המצומצם בין מספר המבחנים שנבדקו לבין זמן הבדיקה הוא 7 : 1.$$

$$123. (א) לא (ב) כן 4 : 5 (ג) כן 7 : 1 : מומלץ לעודד את התלמידים להשתמש כמה פעמים בתכונת הפרופורציה:$$

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

$$\text{אם } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ אז } a \cdot d = b \cdot c$$

124. המשימה מובילה למציאת חוקיות. א) 6 ב) 10 ג) 16 ד) $2n$

125. יונה צודק. נימוק אפשרי: אם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ו- $a=1$, אז $\frac{1}{b} = \frac{c}{d}$.

126. אפשר לבקש מהתלמידים לנמק את תשובותיהם ולתקן את המשפטים שאינם נכונים.
א) נכון. ההיקף גדול פי 4 מאורך הצלע, כלומר היחס הוא 4 : 1. אם אורך הצלע הוכפל ב-2, היחס הוא 8 : 2. $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$; ב) לא נכון. השטח מחושב על-ידי אורך הצלע בחזקת 2. כאשר אורך הצלע מוכפל ב-2, השטח מוכפל ב-4; ג) לא נכון. הגובה גדל עם הגיל (עד גיל מסוים), אבל היחס אינו קבוע; ד) לא נכון. ככל שיש יותר פועלים (עד גבול מסוים), זמן העבודה מתקצר; ה) נכון עד סוף גיל ההתבגרות, אחר-כך הגובה קבוע. בגיל מבוגר קורה שהגובה קטן; ו) נכון. התצלום הוא הקטנה אחידה של המקור.

127. א)

5	10	9.6	144
12	$4\frac{1}{6}$	4	60

ב)

9	27	$215\frac{1}{9}$	63
22	$11\frac{1}{22}$	88	$25\frac{17}{25}$

128. לא. למזלנו הגיל והגובה אינם גדלים פרופורציוניים.

129. במשימה מפתחים תובנה מספרית. המשימה דורשת הסתכלות על המספרים ושימוש בהרחבה.
5.4 גדול פי 3 מ-1.8; 9 גדול פי 5 מ-1.8; למציאת המשקל המתאים ל-14 מ"ר אפשר להיעזר בתכונת הפרופורציה $x = \frac{14 \cdot 1.8}{6}$, או להשתמש בתכונות שבסוגיה ו'.

30	18	14	6	שטח במ"ר
9	5.4	4.2	1.8	משקל הצבע בק"ג

130. לא. היחס בין הדרך לזמן - שונה. $\frac{50}{4} \neq \frac{40}{3} \neq \frac{30}{2}$.

131. א) 7; ב) $\frac{5}{6}$.

132. א) 15 כוסות שקדים. $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$; ב) 20 כוסות.

133. 3 מכלים. המכלים מכילים אותה כמות של כוסות, 12 כוסות מכל סוג. מאחר שהיחס בין כוסות השקדים לבין כוסות הסוכר הוא 2 : 3, גם היחס בין כמויות המכלים הוא 2 : 3.

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

134. המשימה מובילה למציאת חוקיות (א) $\frac{1}{5}$ (ב) $\frac{3}{5}$ (ג) $\frac{n}{5}$.

135. משימה דומה למשימה הקודמת עם דגש על השלם. (א) $\frac{1}{7}$ (ב) $\frac{3}{7}$ (ג) $\frac{4}{7}$ (ד) כל הבית, $\frac{7}{7}$.

136. (א) מחירן של 4 אריזות הוא 13 ₪. מחירן של 3 אריזות הוא 9.75 ₪; (ב) הדס קנתה שש אריזות.

137. כן. $\frac{5.10}{3} = \frac{6.80}{4}$.

138. (א) 32 כוסות. $\frac{8}{2} = \frac{32}{8}$; (ב) 24 כוסות. $\frac{8}{2} = \frac{24}{6}$.

139. (א) $\frac{18}{45} = \frac{2}{5}$; (ב) $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$; (ג) 6 ק"ג. $15 \cdot \frac{2}{5} = 6$; $15 \div \frac{5}{2} = 6$; (ד) כן. היחס המצומצם של כולם שווה.

140. לא. יש להתאים את היחידות. נוח להעביר את כולן ליחידות הקטנות: דקות. $\frac{45}{6} \neq \frac{70}{9}$.

141. המחיר לקילו הוא 56.2 ₪. בהתאם לכך אפשר להשלים את הטבלה בעזרת מחשבון.

3.5	1.2	1	0.8	משקל בק"ג
196.7	66.44	56.20	44.96	מחיר בשקלים

142. 450 שניות או 7.5 דקות.

143. (א) 187.5 ליטר חלב. (ב) 12 ק"ג גבינה.

144. (א) $k = \frac{h}{z}$ (ב) $k = \frac{d}{t}$ (ג) $k = \frac{p}{s}$ (t - הזמן, s - שכר לשעה)

ז. תכונות של גדלים פרופורציוניים, עמ' 40

קטע שיעור זה מומלץ לכיתות מתקדמות, ולכן זוהי הסוגיה האחרונה בפרק. מציגים את התכונות של גדלים פרופורציוניים, שהן התכונות של הפונקציה הקווית.

$$f(ax) = af(x) \text{ ו- } f(x+y) = f(x) + f(y)$$

תכונות אלה יעילות במיוחד לחישובים, אך הקושי הוא בהבנתן.

מגלים

מוצגים שני מצבים בחיי היום-יום שבהם נדרשים חישובים. כוונת הפעילויות היא לפתח חשיבה פרופורציונית על-ידי הפעלת דרכי חישוב המבוססות על תכונות הפרופורציה.

1. מתכון של עוגה:

(א)

4	6	8	10	מספר מנות
300	450	600	750	קמח (גרם)
90	135	180	225	חמאה (גרם)
4	6	8	10	ביצים
100	150	200	250	סוכר(גרם)

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

ב) דרך אפשרית: את הכמויות הנתונות ל-8 מנות, מחלקים ב-2, ומקבלים את הכמויות המתאימות ל-4 מנות. את הכמויות הנתונות ל-4 מנות, מחלקים ב-2, ומקבלים את הכמויות המתאימות ל-2 מנות. כדי לקבל את הכמויות המתאימות ל-10 מנות, מחברים את הכמויות ל-8 מנות ואת הכמויות המתאימות ל-2 מנות. כדי לקבל את הכמויות המתאימות ל-6 מנות, מחברים את הכמויות ל-4 מנות ואת הכמויות ל-2 מנות.

2. א) אפשר לחשב את המרחק שעוברת המכונית ב-30 שניות על-ידי התרגיל $20 \cdot 30$ או על-ידי התרגיל $5 \cdot 6$. אפשר לחשב את הזמן שעוברים ב-360 מטר על-ידי התרגיל $18 = 1 + 2 + 3 \cdot 5$ (18 שניות, כי $360 = 3 \cdot 100 + 40 + 20$).

לומדים



ההסברים על עקרונות החישובים מסובכים יותר מהחישובים עצמם, ולכן השיעור קשה! מומלץ לבצע את החישובים ולהסביר את העקרונות תוך כדי חישובים. תכונות הפרופורציה המתוארות הן תכונות הפונקציה הקווית.

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{א.}$$

$$f(ax) = af(x) \quad \text{ב.}$$

תכונות אלה מאוד יעילות לביצוע חישובים. לדוגמה, אם ידוע ש- $f(2) = 5$. אפשר לומר ש- $f(8) = 4 \cdot 5 = 20$ וש- $f(1) = 2.5$ וש- $f(9) = f(8) + f(1) = 20 + 2.5 = 22.5$.

מתרגלים

145. כן. היחס המצומצם בין משקל התפוחים לבין מחירם הוא $\frac{2}{5}$.

146.

3	1	0.5	2.5	משקל גבינה (ק"ג)
48	16	8	40	מחיר גבינה (₪)

דוגמה: כשמחלקים ב-5, מקבלים 0.5. לכן נחלק את 80 ב-5, ונקבל 16.

$$y = 10 \quad x = 25 \quad \text{147.}$$

148. א) 800 מילים; ב) 12.5 דקות; ג) 2,400 מילים; ד) 18 דקות.

149. א) מספר הילדים גדול פי 2 ממספר המלוניים; ב) רחל צריכה עוד 2 מלוניים. מספר המלוניים הוא חצי ממספר הילדים.

$$150. \quad \frac{100}{40} = \frac{350}{140} \quad \text{גרם.}$$

151. א) עובי חבילת דפי צילום המכילה 500 דפים, הוא 5.2 ס"מ. עובי 100 דפים הוא 1.04 ס"מ. עובי 250 דפים הוא 2.6 ס"מ. עובי 1,500 דפים הוא 15.6 ס"מ; ב) $\frac{1000}{10.4} = \frac{125}{1.3}$.

152. א) שמשון עובר 10 ק"מ ב-2 שעות; 15 ק"מ ב-3 שעות; 20 ק"מ ב-4 שעות; 1 ק"מ ב- $\frac{1}{5}$ שעות, שהן

12 דקות; ב) במשך 40 דקות צעד שמשון $3\frac{1}{3}$ ק"מ.

153. א) 27 צעדים; ב) 24 צעדים; ג) 63 צעדים; ד) 128 צעדים; ה) 162 צעדים.

154.

30	0.9	2.4	0.3	9	6	3	0.6	מסי ליטרים
500	15	40	5	150	100	50	10	מסי ק"מ

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה

155. א) מספר הסטודנטים גדול פי 30 ממספר אנשי ההוראה; ב) כן. יחס הפרופורציה הוא 30; ג) כן. יחס

הפרופורציה הוא $\frac{1}{30}$; ד) 87 אנשי הוראה;

158. א) $\frac{36}{7}$; ב) $\frac{36}{5}$; ג) $\frac{35}{3}$; ד) $\frac{35}{12}$.

159. 2.5 ש.

160. א) 12; ב) 2; ג) 10; ד) 60.

161. א) 36 : 6; ב) 36 : 4.

162. א) $a = 9$; ב) $b < 9$; ג) $c > 5$; ד) $k < 8$.

163. ירון בן 9. ירון גדול מיובל פי 3.

164. א) 15 צעדים; ב) 25 צעדים; ג) 250 צעדים; ד) 750 צעדים.

165. א) 780 ש. $\frac{416}{8} = \frac{780}{15}$; ב) 12 ג'. $\frac{416}{8} = \frac{624}{12}$.

166. ב'.

167. בכיתה ז' רכשו את המיומנויות של העתקת קטעים, מציאת סכום קטעים וזיהוי אמצע קטע. בתרגיל זה מיישמים מיומנויות אלו, ויש כמה אפשרויות לכך. דוגמה: אורך הקטע הנתון הוא 4 סנטימטרים. הקטע AB אורך פי 2 מהקטע הנתון. הקטע CD הוא חצי מהקטע הנתון. הקטע EF הוא סכום הקטע הנתון והקטע CD, או גדול פי 3 מהקטע CD. הקטע GH הוא חצי מהקטע CD. הקטע IJ הוא סכום הקטעים EF ו-GH. הקטע KL הוא חצי מהקטע EF או סכום הקטעים CD ו-GH.

168. א) $4 \cdot c$; ב) c^2 ; ג) $c : 4 = c : 4$; ד) $c^2 : 4 \cdot c = c : 4$; ה) שטח הריבוע הוא 25 יח' שטח; ו) 20 יח' אורך.

169. מיטל. הזמן של שתיהן שווה. מאחר שמיטל הקלידה יותר מילים, מהירות ההקלדה שלה גדולה יותר.

170. א) שעתיים. $\frac{3}{1.5} = \frac{4}{2}$; ב) 280 ש. $\frac{210}{3} = \frac{280}{4}$.

171. אורך הבסיס של כל המשולשים זהה, לכן השטח הוא ביחס לגובה.

172. א) 17.6; ב) 11.25; ג) 0.7; ד) 7.28.

173. לכל התיבות יש אותו בסיס, לכן נפח כל תיבה הוא ביחס לעומקו.

174. כן. 1.6 ק"מ בשתי דקות הם 48 קמ"ש. מאחר שהמהירות המותרת היא רק 45 קמ"ש, אפרים הרוכב מהר יותר, עובר על החוק.

175. 15 ק"מ. אפשר להסביר זאת על-פי תכונות הפרופורציה. 3 שעות הן פי 1.2 יותר משעתיים וחצי, לכן נכפול את מספר הק"מ (12.5) ב-1.25, נקבל 15.

א. יחס ופרופורציה – מדריך למורה



מיומנויות, עמ' 47

בדקו את עצמכם

(2) 15 ליטרים. (3) 2.4 נה. (4) 8 מדבקות. (5) 2.25 ק"מ.



מוכנים להמשיך?, עמ' 50

(1) גי; (2) ב'; (3) א'; (4) ב', ד'; (5) ב', ד'; (6) ד'; (7) ג'; (8) ג'; (9) ד'; (10) ב'.



ממשיכים בתרגול, עמ' 51

134. 40,000 ק"מ מתייחסים ל 360° כמו 1 מיל ימי לדקה. יש להמיר את המעלות לדקות.

$$\frac{40,000}{21,600} = 1 \frac{23}{27} \approx 1.85$$

כל מיל ימי הוא ≈ 1.85



העמקה, עמ' 58

1. (א) 12 : 1 (ב) 36 : 1 (ג) 3 : 1 (ד) 12 : 1 (ה) כן. בסעיפים ו' ו- ח' התלמידים צריכים לשים לב ליחידות (מטר ומילימטר). (ו) היחס הוא 914.4 : 25.4, כלומר 36 : 1. (ח) היחס הוא 914.4 : 304.8, כלומר 3 : 1. המסקנה היא שהיחס אינו תלוי ביחידות.

2. (א) היחס בין אינץ' לנקודה הוא 1 : 144, כלומר באינץ' יש 144 נקודות. (ב) בסרגל WORD האורכים הנתונים לעומק גוף הם מחלקים של 144.

3. התלמידים צריכים לשים לב ליחידה (מילימטר). (א) 35.56 ס"מ. (ב) 75 ס"מ.

4. כדור הארץ מהווה 360° , שהן 21,600 דקות, לכן מיל ימי הוא בערך 1.851 ק"מ.

5. (א) לפי המוסבר בשאלה $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$. כיוון ש- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ אפשר לכתוב $\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. (ב) באותה דרך כמו בסעיף הקודם, אבל במקום לחבר $a \cdot b$, מחסרים $a \cdot b$.

6. יישום של השאלה הקודמת. $\frac{4}{6} = \frac{10}{15} = \frac{4+10}{6+15} = \frac{14}{21}$

7. יישום של השאלה הקודמת. $\frac{15}{20} = \frac{9}{12} = \frac{15-9}{20-12} = \frac{6}{8}$

8. (א) $\frac{x}{12} = \frac{5}{4} = 1.25$ (ב) $\frac{x}{5} = \frac{12}{4} = 3$

9. $\frac{6}{y} = \frac{10}{60}$, $\frac{60}{y} = \frac{10}{6}$, $\frac{y}{6} = \frac{60}{10} = 6$

10. $\frac{x}{y} = \frac{2}{9}$, $\frac{y}{x} = \frac{9}{2}$